

קדקודים ודיפקט

קדקוד של מודול:

סימון: אם $M \simeq N \oplus N'$ נכתוב $N \mid M$

הנחה P : נקח R להיות שדה ממאפיין p או חוג הערכה בשלישיה מודולרית.

תזכורת:

הגדרה: RG -מודול M הוא פרויקטיבי יחסית ל- H אם"ם קיים H -מודול X כך ש- $M \mid X^G$

הגדרה: קדקוד של RG -מודול M הוא תת-חבורה Q של G מסדר מינימלי כך ש- M הוא פרויקטיבי יחסית ל- Q . מקור של M הוא Q -מודול S כך ש- $M \mid S^G$

אנו רוצים להוכיח שהקדקודים כולם חבורות p צמודות. הוכחנו את המשפט הבא.

משפט: נניח ש- H תת-חבורה של G שמכיל חבורת p -סילוב, כאשר p המאפיין

1. RG -מודול M הוא פרויקטיבי יחסית ל- H ,

2. אם M_H פרויקטיבי, גם M פרויקטיבי

משפט: אם R מקיים את הנחה P , RG -מודול אי-פריד. אז

1. קיים p -תתחבורה Q , יחידה עד כדי צמידות, כך ש-לכל תת-חבורה H של G , M פרויקטיבי יחסית ל- H אם"ם H מכיל צמודה של Q .

2. קיים RQ -מודול S , יחידה עד כדי צמידות ב- $N_G(Q)$, כך ש- $M \mid S^G$.

הוכחה: נבחר p -חבורה Q מסדר מינימלי כך ש- M פרויקטיבי יחסית ל- Q . קיים לפחות אחד כי לפי המשפט הקודם, אפשר לקחת חבורת p -סילוב. הוכחנו בשיעור הקודם ש- $M \mid (M_H)^G$, לכן יש מרכיב ישיר S אי-פריד של M_Q כך ש- $M \mid S^G$.

$\Leftarrow M$ פרויקטיבי יחסית ל- H וצריך להוכיח ש- H מכיל צמודה של Q : לפי ההגדרה, קיים H -

מודול V כך ש- $M \mid V^G$. וכיוון ש- M אי-פריד אפשר לקחת את V להיות אי-פריד. כעת נפעיל את משפט מקי

$$(S^G)_H \simeq \bigoplus_{s \in T} (s \otimes S)_{sQs^{-1} \cap H}$$

כאשר T אוסף נציגים לקוסטים $Q-H$. לפי ההגדרה של S ושל V , נקבל $V \mid M_H \mid (S^G)_H$. כיוון ש-

V אי-פריד. קיים $s \in T$ כך ש- $V \mid (s \otimes S)_{sQs^{-1} \cap H}$. לכן M פרויקטיבי יחסית ל- $sQs^{-1} \cap H$. כיוון ש-

Q מסדר מינימלי, חייב ליהות ש- $sQs^{-1} \cap H = sQs^{-1}$, ולכן $sQs^{-1} \subseteq H$ מש"ל

$H \Rightarrow$ מכיל צמודה sQs^{-1} של Q וצריך להוכיח ש- M פרויקטיבי יחסית ל- H . הצמודה sQs^{-1} גם קדקוד, עם מקור $S' = (s \otimes S)$, ואז $M \mid ((s \otimes S)^H)^G$, כי $S^G \simeq (s \otimes S^G) \simeq (s \otimes S)^G$.

התמת גרין

נצטט את המשפט הא, בצורה שניתן בספר של טבנאזת פרק 3 סעיף 20. אותו משפטעם הוכחה שונה, נמצאת בספר של אלפרין, פרק 11. אם P הוא חבורת p -ו- X מודול אי-פריד עליו, נגדיר

$$N_G(P, X) = \{g \in G \mid P^g = P, X^g = X\}$$

- משפט:** אם P הוא חבורת p - של G ו- X מודול אי-פריד מעל RP , ונניח ש- H מכיל $N_G(P, X)$,
1. אם L הוא RG -מודול אי-פריד בעל קדקוד P ומקור X , אז ל- L_H יש מחלקת איזומופיזם יחיד של גורמים ישירים N בעל קדקוד P ומקור X .
 2. התאמה זו חד-חד ערכית ועל.
 3. אם N מתאים ל- L תחת התאמה זו, אז N איזומורפית לגורם ישיר של N^G .

דוגמא 1: G חבורת פרובניום מסדר 21, מכפלה חצי ישרה של שתי חבורת ציקליות, $p = 3$, $P \simeq C_3$ ו- X ממיד 2. דוגמא 2: אותה חבורה, $p = 7$.

חבורת דיפקט

תהי $A = RG$. כל בלוק B של RG הוא $A - A$ בימודול. הוא גם $A \otimes A^{op}$ מודול שמאלי, שהוא בעצם מודול עבור $R[G \times G]$. לכן יש לו גם קדקוד Q ב- $G \times G$. יש הומומורפיזם של חבורות

$$\Delta : G \rightarrow G \times G$$

$$\Delta : g \mapsto (g, g)$$

מסרתינו הוא להראות $Q = \Delta D$ עבור D תת-חבורת p של G . החבורה D יקרא **חבורת הדיפקט** של הבלוק.

למה: יש קדקוד של הבלוק שמוכל ב- ΔG .

הוכחה: הוכחנו מקודם שאם B פרויקטיבי יחסית מעל ΔG , אז יש קדקוד $Q \leq \Delta G$. לכן מספיק להוכיח ש- B פרויקטיבי יחסית ל- ΔG . כיוון ש- B גורם ישיר של RG , יספיק להוכיח ש- RG הוא גורם ישיר של מודול מושרת ל- $R[G \times G]$ מ- ΔG .

נקח $S = 1_{\Delta G}$, המודול הטריביאלי. נגדיר $T = \{(g, e) \mid g \in G\}$, אוסף נציגים לקוסים. ההעתקה

$$f : RG \rightarrow (1_{\Delta G})^{G \times G}$$

$$f : g \mapsto (g, e) \otimes v$$

היא הומומורפיזם של $G - G$ בימודלים כי

$$f((h, k) \cdot g) = f(hgk^{-1})$$

$$= (hgk^{-1}, e) \otimes v$$

$$= (hgk^{-1}, e)(k, k) \otimes v$$

$$= (hg, k) \otimes v$$

$$= (h, k) \cdot (g, e) \otimes v$$

$$= (h, k) \cdot f(g)$$

מסקנה: הקדקוד של בלוק B הוא חבורה $Q = \Delta D$.

הוכחה: לפי משפט שהוכחנו, יש קדקוד בתוך חבורת ה- p -סילוב $P \times P$ של $G \times G$. כל תתי-חבורות Q של $P \times P \cap \Delta G$ הם מהצורה ΔD כאשר D היא ההטלה על המרכיב הראשון.