

אורג המספרים (89-256) - ארגול 1

להקצה עז כ"ז הנ"סן ג"ס, טוס 11.4.

(1) יהיו  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ . להוכיח:  $(a+b, c) = (a, c) + (b, c)$

(2) נניח שהפירוקים של  $a, b$  לקבוצות האפיונים ייחודיים. אילו קבוצות אלו?

(3) הנה האלגוריתם שמוזכר אלו  $(a, b)$  אפילו גלי. להוכיח שהפירוקים יהיו  $a = a_0, b = b_0$ .

(א) במקום השלם אפשר לקחת את הערכים המוחלטים שלהם  $(a, b) = a_n$  ולכן להניח  $a_n \geq 0$ . אם  $a_n = b_n$ , אזי  $(a_n, b_n) = a_n$ . אחרת, מחליפים  $a_n, b_n$  אם צריך ומניחים  $a_n > b_n$ .  
(ב) רואים  $a_n = b_n + r_n$ , כאשר  $0 \leq r_n < b_n$ . אפשר למצוא את  $r_n$  לפי האלגוריתם האוקלידיו שלמזון בביק רפרי היסודי.

(ג) אם  $r_n = 0$ , אזי  $a_n | b_n$  ולכן  $(a_n, b_n) = b_n = (a, b)$ .  
(ד) אם  $r_n \neq 0$ , מקזרים  $a_{n+1} = b_n, b_{n+1} = r_n$  ומרזים את האלגוריתם שוב עם  $(a_{n+1}, b_{n+1})$ .

להוכיח שכל  $a, b$  האלגוריתם הזה מסתיים אחרי זמן סופי וניתן אלו הגובה הנכונה עבור  $(a, b)$ .

(4) להשתמש האלגוריתם הנ"ל בני לחשב את  $(455, 1235)$ .

(5) להוכיח ששום מספר בסדרה אינו ריבוע של מספר שלם.  $11, 111, 1111, \dots$

(6) להוכיח שאם  $N$  הוא ה"ן מספר טבעי  $N = 3^k + 1$  אזי  $k = 3$ .

(7) יהיו מספרים  $a, b$  כהוביות כי  $(2^a - 1, 2^b - 1) = 2^{\gcd(a,b)} - 1$

האם זה נאמר? האם ניתן להוכיח את זה באופן אינדוקציה? האם זה נאמר? האם ניתן להוכיח את זה באופן אינדוקציה?

(8) נגזיר סדרה  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  באופן הבא:  $a_1 = 0, a_2 = 1$  וכל איבר  $a_n$  של הסדרה הוא סכום האיברים  $a_{n-1}$  ו- $a_{n-2}$  (הגבס'ים 10) ומכאן  $a_3 = 1, a_4 = 101, a_5 = 10110$  וכו'. להוכיח כי  $a_n \equiv 0 \pmod{6}$  אם ורק אם  $n \equiv 1 \pmod{6}$ .

(9) יהי  $p > 3$  ראשוני. להוכיח: 
$$\left(\frac{-3}{p}\right) = \begin{cases} 1, & p \equiv 1 \pmod{6} \\ -1, & p \equiv 5 \pmod{6} \end{cases}$$

(10) יהי  $p > 2, p \neq 5$  מספר ראשוני. להוכיח:

$$\left(\frac{5}{p}\right) = \begin{cases} 1, & p \equiv \pm 1 \pmod{10} \\ -1, & p \equiv \pm 3 \pmod{10} \end{cases}$$