תורת המספרים (89256)
תרגיל 1

1. יהי p מספר ראשוני. הוכח שאם p^2+2 גם כן ראשוני, אזי $p=3$.
2. הוכח שאם $a \equiv b \bmod n$, אזי $(a,n)=(b,n)$.
3. השתמש באלגוריתם של איקלידוס כדי למצוא $(2019, 5779)$.
4. מצא את כל הפתרונות של השקילות $18x \equiv 30 \bmod 276$.
5. מצא את כל הפתרונות של השקילות $2019x \equiv 1 \bmod 5779$.
6. הוכח שהשלשיה היחידה של מספרים שלמים שמקיימת $a^2+b^2=3c^2$ הינה $(a,b,c)=(0,0,0)$.

   רמז: הסתכל במשוואה הזאת מודולו 3.
7. יהי p ראשוני. הוכח שהשלשיה היחידה של מספרים שלמים שמקיימת $a^3+pb^3+p^2c^3=0$ הינה $(a,b,c)=(0,0,0)$.
8. הוכח שאם החזקות $m,n>1$ מקיימות $3^m-2^n=\pm 1$, אזי $(m,n)=(2,3)$.

   המשפט הזה הוכח לראשונה על ידי רבי לוי בן גרשון (הרלב"ג) בדרום צרפת במאה ה־14 למניינם.

   רמז: במקרה של המשוואה $3^m-2^n=1$, התבונן מודולו מספרים מתאימים והוכח כי m חייב להיות זוגי, ואילו n אי־זוגי. אזי 3^m-1 מתפרק. מה ניתן ללמוד מן הפירוק הזה?