ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2016, том 471, № 2, с. 136–138

МАТЕМАТИКА

УДК 512.745

ВЕРБАЛЬНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И ВЕРБАЛЬНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ С КОНСТАНТАМИ ПРОСТЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ГРУПП

© 2016 г. Н. Л. Гордеев[1,2,*], Б. Э. Кунявский[3,**], Е. Б. Плоткин[3]

Представлено академиком РАН В.П. Платоновым 20.06.2016 г.
Поступило 20.06.2016 г.

В работе рассматриваются вербальные отображения $w\colon G^m \to G$ и вербальные отображения с константами $w_\Sigma\colon G^m \to G$ простой алгебраической группы G, где w – нетривиальное слово свободной группы F_m ранга m, $w_\Sigma = w_1\sigma_1 w_2 \cdots w_r\sigma_r w_{r+1}$, $w_1, \ldots, w_{r+1} \in F_m$, $w_2, \ldots, w_r \neq 1$, $\Sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_r \mid \sigma_i \in G\backslash Z(G)\}$. В работе приводятся результаты об образах таких отображений, в частности, теорема о доминантности "общих" вербальных отображений с константами, которая является аналогом известной теоремы А. Бореля о доминантности собственно вербальных отображений. Кроме того, показана взаимосвязь между существованием унипотентов в образе вербального отображения и строением многообразия представлений $R(\Gamma_\omega, G)$ группы $\Gamma_\omega = \mathrm{F}_m/\langle w\rangle$.

DOI: 10.7868/S0869565216320049

1. ВЕРБАЛЬНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ С КОНСТАНТАМИ

Для любой группы G и непустого слова w свободной группы F_m ранга m определено вербальное отображение $w\colon G^m \to G$ формулой $w((g_1, \ldots, g_m)) = w(g_1, \ldots g_m)$ (подстановка элементов g_i вместо переменных x_i). В последнее время возрос интерес к изучению вербальных отображений простых алгебраических групп (см. [1–3, 5, 8, 9]). Для таких групп мы рассматриваем также вербальные отображения с константами. А именно, пусть G – простая алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем K (здесь мы отождествляем группу G с группой точек $G(K)$) и пусть $w_1, \ldots, w_{r+1} \in F_m$, где $w_2, \ldots, w_r \neq 1$, $\Sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_r \mid \sigma_i \in G\backslash Z(G)\}$ (возможно $\sigma_i = \sigma_j$ для $i \neq j$). Выражение $w_\Sigma = w_1\sigma_1 w_2 \cdots w_r\sigma_r w_{r+1}$ называется словом с константами (обычные слова мы также рассматриваем как слова с константами при $\Sigma = \phi$, $w = w_1$). Поведение слов с константами на простых алгебраических группах исследовалось, в частности, в работах [6, 7, 15]. Слово с константами естественно определяет вербальное отображение с константами $w_\Sigma\colon G^m \to G$. В [6] такие отображения использовались для изучения произведений классов сопряженных элементов, а в [8] – как метод для изучения собственно вербальных отображений.

Одним из основных вопросов теории вербальных отображений является вопрос об их сюръективности (ответ на этот вопрос неизвестен даже для группы $G = \mathrm{SL}_2(C)$; см. [9]). Согласно теореме А. Бореля [4], вербальные отображения простых алгебраических групп являются доминантными, т.е. образ $\mathrm{Im}w$ такого отображения w содержит плотное открытое подмножество группы G. Вербальное отображение с константами не обязано быть доминантным (например, для $w_\Sigma = x\sigma x^{-1}$). Однако для "общего" слова с константами такое отображение оказывается доминантным.

Т е о р е м а 1. *Пусть* $\Omega_r = (w_1, \ldots, w_{r+1})$ – *последовательность слов из* F_m, *у которой* $w_2, \ldots, w_r \neq 1$. *Предположим* $\prod_{i=1}^{r+1} w_i \notin [F_m, F_m]$. *Тогда существует непустое открытое по Зарискому подмножество* $U(\Omega_r) \subset G^r$ *такое, что для любой последовательности* $\Sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_r) \in U(\Omega_r)$ *отображение* $w_\Sigma\colon G^m \to G$ *доминантно.*

Мы также рассматриваем случай вербальных отображений с константами, для которых $\prod_{i=1}^{r+1} w_i = 1$. А именно, пусть $w(x, y) \in F_2$ и $\sigma \in G$. Тогда отображение $w_\sigma\colon G \to G$, определенное формулой $w_\sigma(x) = w(x, \sigma)$, является вербальным отображением с константами (здесь константы – это степени σ). Имеет место следующая теорема, которая может

[1] Российский государственный педагогический университет им. А.И. Герцена, Санкт-Петербург
[2] Санкт-Петербургский государственный университет
[3] Bar-Ilan University, Ramat Gan, Israel
*E-mail: nickgordeev@mail.ru
**E-mail: kunyav@gmail.com

быть инструментом исследований вербальных отображений от двух переменных (см. [8]).

Т е о р е м а 2. *Пусть* $w \in [F_2, F_2]$. *Тогда существует непустое открытое по Зарискому подмножество* $U(w) \subset G$ *такое, что для любого* $\sigma \in U(w)$ *множество* $\{g(\operatorname{Im} w_\sigma)g^{-1} \mid g \in G\}$ *плотно по Зарискому в* G.

2. ПОЛУПРОСТЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ В Im w

В работе [3] доказано, что для $G = \mathrm{SL}_2(K)$ образ вербального отображения $w\colon \mathrm{SL}_2(K)^m \to \mathrm{SL}_2(K)$ содержит все полупростые элементы группы $\mathrm{SL}_2(K)$ (здесь K – алгебраически замкнутое поле) за исключением, возможно, элемента $-\mathbf{1}$ ($\mathbf{1}$ – единичная матрица). Используя тот факт, что для простых алгебраических групп, кроме типов A_r, D_{2r+1}, E_6, в соответствующей системе корней имеется подсистема того же ранга, состоящая из объединения непересекающихся подсистем типа A_1, можно получить следующее утверждение.

Т е о р е м а 3. *Пусть* G *– простая алгебраическая группа, не являющаяся группой типа* A_r, $r > 1$, D_{2r+1}, E_6, *и пусть* $w\colon G^m \to G$ *– вербальное отображение. Тогда любой регулярный полупростой элемент группы* G *содержится в* $\operatorname{Im} w$. *Более того, для любого полупростого элемента* $g \in G$ *существует элемент второго порядка* g_0 *такой, что* $gg_0 \in \operatorname{Im} w$.

3. УНИПОТЕНТНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ В Im w И МНОГООБРАЗИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ КОНЕЧНОПОРОЖДЕННОЙ ГРУППЫ

Пусть T, W – фиксированный максимальный тор и группа Вейля группы G, $\pi\colon G \to T/W$ – факторморфизм (см. [14]). Для вербального отображения $w\colon G^m \to G$ определим $Y_w = w^{-1}(\mathbf{1})$, $\Xi_w = (\pi \cdot w)^{-1}(\mathbf{1})$ (здесь $\mathbf{1}$ – и нейтральный элемент группы G, и образ нейтрального элемента T в T/W). Тогда $Y_w \subset \Xi_w$ – это аффинные подмногообразия G^m и $\Xi_w = \{(g_1, \ldots, g_m) \in G^m \mid w(g_1, \ldots, g_m)$ – унипотент$\}$, $Y_w = R(\Gamma_w, G)$ – многообразие представлений группы $\Gamma_w = F_m/\langle w\rangle$ с одним определяющим соотношением w в группу G. Таким образом, существование нетривиальных унипотентных элементов в $\operatorname{Im} w$ эквивалентно неравенству $Y_w \neq \Xi_w$. Например, для простейшего случая $G = \mathrm{SL}_2(K)$ и $m = 2$ все неприводимые компоненты многообразия Ξ_w имеют размерность 5, и, таким образом, существование нетривиальных унипотентных элементов в $\operatorname{Im} w$ следует из существования неприводимых компонент Y_w размерности ≤ 4.

Многообразие представлений групп – важный объект с различных точек зрения (см., например, [10–13]), и, по-видимому, в вопросе об унипотентных элементах в $\operatorname{Im} w$ играет ключевую роль.

Существование унипотентных элементов в $\operatorname{Im} w$ – открытый вопрос даже для случая $G = \mathrm{SL}_2(K)$. В [3] доказано, что для $G = \mathrm{SL}_2(K)$ ($\operatorname{ch} K = 0$) и слова $w \notin [[F_m, F_m], [F_m, F_m]]$ в $\operatorname{Im} w$ содержатся все унипотентные элементы, а также просчитан пример (с использованием компьютера) слова $w \in [[F_m, \mathrm{F_m}], [F_m, F_m]]$, для которого образ w также содержит все унипотентные элементы. Мы рассматриваем аналогичный пример, для которого просчитываем (без использования компьютера) многообразия Y_w, Ξ_w. Пусть K – алгебраически замкнутое поле ($\operatorname{ch} K = 0$), $w\colon \mathrm{SL}_2(K)^2 \to \mathrm{SL}_2(K)$ – отображение для $w(x, y) = [[x, y], x[x, y]x^{-1}]$, B, T – верхние треугольные и диагональные матрицы $\mathrm{SL}_2(K)$, $\omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, C_ω – класс сопряженных матриц ω в $\mathrm{SL}_2(K)$. Тогда верна

Т е о р е м а 4. *Имеются в точности три неприводимые компоненты многообразия* Ξ_w:

$$\Xi_w^0 = \overline{\left\{g(B \times B)g^{-1} \mid \mathrm{g} \in \mathrm{G}\right\}},$$

$$\Xi_w^1 = \overline{\left\{g(T \times \omega B)g^{-1} \mid \mathrm{g} \in \mathrm{G}\right\}},$$

$$\Xi_w^2 = C_\omega \times G,$$

и в точности три неприводимые компоненты многообразия Y_w:

$$Y_w^0 = \Xi_w^0, Y_w^1 = \overline{\left\{g(T \times \omega T)g^{-1} \mid g \in G\right\}} \subset \Xi_w^1,$$

$$\dim Y_w^1 = 4, \quad Y_w^2 = \Xi_w^2$$

(*здесь черта – это замыкание по Зарискому*).

Таким образом, наличие компоненты Y_w^1 размерности 4 гарантирует существование всех унипотентов в $\operatorname{Im} w$. Хотя полное доказательство данной теоремы требует значительного объема технических рассуждений, сам факт наличия всех унипотентов в $\operatorname{Im} w$ доказывается элементарным подсчетом значения $w(s, \omega b)$ для $s \in T$, $s^4 \neq \mathbf{1}$, $b \in B$, $b \notin T$.

Работа первого автора поддержана Министерством образования и науки Российской Федерации и грантом РФФИ 14–01–00820. Работа второго автора поддержана грантом ISF 1207/12. Работа третьего автора поддержана грантом ISF 1207/12 и Математическим институтом Эмми Нётер.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bandman T., Garion Sh., Kunyavskii B.* Equations in Simple Matrix Groups: Algebra, Geometry, Arithmetic, Dynamics // Cent. Europ. J. Math. 2014. V. 12. № 2. P. 175–211.
2. *Bandman T., Kunyavskii B.* Criteria for Equidistribution of Solutions of Word Equations on SL(2) // J. Algebra. 2013. V. 382. P. 282–302.

3. *Bandman T., Zarhin Yu.* Surjectivity of Certain Word Maps on PSL(2, C) and SL(2, C) // Europ. J. Math. 2016. V. 2. P. 614–643.

4. *Borel* A. On Free Subgroups of Semisimple Groups // Enseign. Math. 2. 1983. V. 29. № 1/2. P. 151–164.

5. *Elkasapy A., Thom A.,* About Goto's Method Showing Surjectivity of Word Maps // Indiana Univ. Math. J. 2014. V. 63. № 5. P. 1553–1565.

6. *Gordeev N.* Products of Conjugacy Classes in Algebraic Groups. I. // J. Algebra. 1995. V. 173. P. 715–744.

7. *Гордеев Н.* // Алгебра и анализ. 1997. Т. 9. № 4. С. 63–78.

8. *Gordeev N.* On Engel Words on Simple Algebraic Groups // J. Algebra. 2015. V. 425. P. 215–244.

9. *Klimenko E., Kunyavskii B., Morita J., Plotkin E.* Word Maps in Kac-Moody Setting // Toyama Math. J. 2015. V. 37. P. 25–53.

10. *Lubotzky A., Magid A.R.* Varieties of Representations of Finitely Generated Groups // Mem. Amer. Math. Soc. 1985. V. 58. № 336. 117 p.

11. *Платонов В.П.* Кольца и многообразия представлений конечнопорожденных групп. В сб.: Вопросы алгебры. Минск, 1989. В. 4. С. 36–40.

12. *Платонов В.П., Беняш-Кривец В.В.* Кольцо характеров представлений конечнопорожденных групп // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 1990. Т. 183. С. 169–178.

13. *Rapinchuk A.S., Benyash-Krivets V.V., Chemousov V.I.* Representation Varieties of the Fundamental Groups of Compact Orientable Surfaces // Israel J. Math. 1996. V. 93. P. 29–71.

14. *Springer T.A., Steinberg R.* Conjugacy classes. Seminar on Algebraic Groups and Related Finite Groups. Part E. // Lect. Notes Math. 1970. V. 131. P. 167–266.

15. *Stepanov A.* Subring Subgroups in Chevalley Groups with Doubly Laced Root Systems // J. Algebra. 2012. V. 362. P. 12–29.