# פתרון תרגיל 7 - נוסחאות נסיגה

1. א. נתונה נוסחת הנסיגה:

$$a_n - a_{n-1} - 6a_{n-2} = 0 \qquad (n \ge 2)$$
$$a_0 = 5, a_1 = 0$$

הפולינום האופייני הוא $x^2 - x - 6$. שורשיו הם $x = 3, -2$ ולכן הפתרון הכללי הוא

$$a_n = \alpha 3^n + \beta(-2)^n$$

אם נציב את תנאי ההתחלה נקבל

$$5 = \alpha + \beta$$
$$0 = 3\alpha - 2\beta$$

ופתרון המערכת הוא $\alpha = 2, \beta = 3$. לכן הפתרון שאנו מחפשים הוא

$$a_n = 2 \cdot 3^n + 3 \cdot (-2)^n \quad (n \ge 0)$$

ב. נתונה נוסחת הנסיגה:

$$a_n - 2a_{n-1} - a_{n-2} + 2a_{n-3} = 0 \qquad (n \ge 3)$$
$$a_0 = 2, a_1 = 10, a_2 = 8$$

הפולינום האופייני הוא $x^3 - 2x^2 - x + 2$. שורשיו הם $x = 1, 2, -1$ ולכן הפתרון הכללי הוא

$$a_n = \alpha + \beta \cdot (-1)^n + \gamma \cdot 2^n$$

אם נציב את תנאי ההתחלה נקבל

$$\alpha + \beta + \gamma = 2$$
$$\alpha - \beta + 2\gamma = 10$$
$$\alpha + \beta + 4\gamma = 8$$

ופתרון המערכת הוא $\alpha = 3, \beta = -3, \gamma = 2$. לכן הפתרון שאנו מחפשים הוא

$$a_n = 3 + 3 \cdot (-1)^{n+1} + 2^{n+1} \quad (n \ge 0)$$

ג. נתונה נוסחת הנסיגה:

$$a_n - a_{n-1} - 2a_{n-2} = 4 \cdot 3^n, (n \ge 2)$$
$$a_0 = 2, a_1 = 7$$

הפולינום האופייני הוא $x^2 - x - 2$. שורשיו הם $x = 2, -1$ ולכן הפתרון ההומוגני הכללי הוא

$$a_n^{(\text{ה})} = \alpha \cdot 2^n + \beta \cdot (-1)^n$$

ננסה למצוא פתרון פרטי. ננחש

$$a_n^{(\text{פ})} = \gamma \cdot 3^n$$

אם נציב זאת במשוואה נקבל

$$\gamma \cdot 3^n - \gamma \cdot 3^{n-1} - 2\gamma \cdot 3^{n-2} = 4 \cdot 3^n$$

לכן $\gamma = 9$. כעת מצאנו פתרון פרטי $a_n^{(\text{פ})} = 9 \cdot 3^n$, ולכן הפתרון הכללי של המשוואה ההתחלתית הוא

$$a_n = \alpha \cdot 2^n + \beta \cdot (-1)^n + 9 \cdot 3^n$$

אם נציב את תנאי ההתחלה נקבל

$$\alpha + \beta + 9 = 2$$
$$2\alpha - \beta + 27 = 7$$

ופתרון המערכת הוא $\alpha = -9, \beta = 2$. לכן הפתרון שאנו מחפשים הוא

$$a_n = -9 \cdot 2^n + 2 \cdot (-1)^n + 9 \cdot 3^n \quad \left(n \ge 0\right)$$

2.א. נתונה נוסחת הנסיגה:

$a_n - a_{n-1} - 6a_{n-2} = 4\cdot 3^n, (n \ge 2)$

$a_0 = 8, a_1 = 2$

נמצא פתרון כללי למשוואה ההומוגנית $a_n - a_{n-1} - 6a_{n-2} = 0$. נסמן $a_n = x^n$ ונקבל $x^2 - x - 6 = 0$ והשורשים הם $x = -2, 3$. לכן פתרון כללי למשוואה ההומוגנית יהיה

$a_n = \alpha(-2)^n + \beta 3^n$

ננסה למצוא פתרון פרטי. ננחש $a_n = \gamma\cdot 3^n$. אם נציב זאת במשוואה נקבל

$\gamma\cdot 3^n - \gamma\cdot 3^{n-1} - 6\gamma\cdot 3^{n-2} = 4\cdot 3^n$

כלומר, $9\gamma\cdot 3^{n-2} - 3\gamma\cdot 3^{n-2} - 6\gamma\cdot 3^{n-2} = 4\cdot 3^n$ ונקבל $0 = 4\cdot 3^n$ וזו סתירה, לכן ננסה פתרון , נציב זאת במשוואה ונקבל

$\gamma\cdot n\cdot 3^n - \gamma\cdot(n-1)\cdot 3^{n-1} - 6\gamma\cdot(n-2)\cdot 3^{n-2} = 4\cdot 3^n$

אם נפשט את המשוואה נקבל

$$\gamma\cdot 9n\cdot 3^{n-2} - \gamma\cdot 3\cdot(n-1)\cdot 3^{n-2} - 6\gamma\cdot(n-2)\cdot 3^{n-2} =$$
$$3^{n-2}(\gamma\cdot 9n - \gamma\cdot 3\cdot(n-1) - 6\gamma\cdot(n-2)) =$$
$$3^{n-2}(\gamma\cdot 9n - \gamma\cdot 3\cdot n - 6\gamma\cdot n + 3\cdot\gamma + 12\cdot\gamma) = 15\cdot\gamma\cdot 3^{n-2} = 4\cdot 3^n$$

לכן $\gamma = \frac{12}{5}$ ופתרון פרטי יהיה $a_n = \frac{4}{5}\cdot n\cdot 3^{n+1}$. ולכן הפתרון הכללי של המשוואה ההתחלתית הוא

$$a_n = \alpha(-2)^n + \beta 3^n + \frac{4}{5}\cdot n\cdot 3^{n+1}$$

אם נציב את תנאי ההתחלה נקבל

$\alpha + \beta = 0$

$-2\alpha + 3\beta + \frac{36}{5} = 2$

ופתרון המערכת הוא $\alpha = \frac{26}{25}, \beta = -\frac{26}{25}$. לכן הפתרון שאנו מחפשים הוא

$$a_n = \frac{26}{25}(-2)^n - \frac{26}{25}3^n + \frac{4}{5}\cdot n\cdot 3^{n+1}$$

ב. נתונה נוסחת הנסיגה:

$a_n - 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 4, (n \ge 2)$

$a_0 = 2, a_1 = 10$

כעת נמצא פתרון כללי למשוואה ההומוגנית $a_n - 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 0$, נסמן $a_n = x^n$ ונקבל $x^2 - 6x + 9 = 0$ , למשוואה זו יש שורש כפול $x = 3$. ולכן הפתרון הכללי למשוואה ההומוגנית נתון לפי

$a_n = \alpha 3^n + \beta n 3^n$

ננסה למצוא פתרון פרטי, ננחש $a_n = \gamma$, אם נציב זאת במשוואה נקבל $4\gamma = 4$ לכן $\gamma = 1$ ולכן $a_n = 1$ הוא פתרון פרטי. ולכן הפתרון הכללי של המשוואה ההתחלתית הוא

$\alpha 3^n + \beta n 3^n + 1$

אם נציב את תנאי ההתחלה נקבל

$\alpha + 1 = 2$

$3\alpha + 3\beta + 1 = 10$

והפתרון של המערכת הוא $\alpha = 1, \beta = 2$. לכן הפתרון שאנו מחפשים הוא

$a_n = 3^n + 2n \cdot 3^n + 1$

ג. נתונה נוסחת הנסיגה:

$a_n - a_{n-1} - 2a_{n-2} = 3 \cdot 2^n, (\mathrm{n} \geq 2)$

$a_0 = 5, a_1 = 5$

כעת נמצא פתרון כללי למשוואה ההומוגנית $a_n - a_{n-1} - 2a_{n-2} = 0$, נסמן $a_n = x^n$ ונקבל $x^2 - x - 2 = 0$, השורשים הם $x = -1, 2$, לכן הפתרון הכללי למשוואה ההומוגנית הוא

$a_n = \alpha \cdot (-1)^n + \beta \cdot 2^n$

ננסה למצוא פתרון פרטי, ננחש $a_n = \lambda \cdot 2^n$ אם נציב זאת במשוואה נקבל

$\lambda \cdot 2^n - \lambda \cdot 2^{n-1} - 2 \cdot \lambda \cdot 2^{n-2} = 3 \cdot 2^n$

אם נפשט את המשוואה נקבל

$\lambda \cdot 2^n - \lambda \cdot 2^{n-1} - 2 \cdot \lambda \cdot 2^{n-2} = 3 \cdot 2^n$

$2^{n-2}(4\lambda - 2\lambda - 2\lambda) = 0 = 3 \cdot 2^n$

והגענו לסתירה. לכן ננסה פתרון $a_n = \lambda \cdot n \cdot 2^n$, אם נציב זאת במשוואה נקבל

$\lambda \cdot n \cdot 2^n - \lambda \cdot (n-1) \cdot 2^{n-1} - 2 \cdot \lambda \cdot (n-2) \cdot 2^{n-2} = 3 \cdot 2^n$

אם נפשט את המשוואה נקבל

$4 \cdot \lambda \cdot n \cdot 2^{n-2} - 2 \cdot \lambda \cdot (n-1) \cdot 2^{n-2} - 2 \cdot \lambda \cdot (n-2) \cdot 2^{n-2} =$

$2^{n-2} \cdot (4 \cdot \lambda \cdot n - 2 \cdot \lambda \cdot n - 2 \cdot \lambda \cdot n + 2 \cdot \lambda + 4 \cdot \lambda) = 3 \cdot 2^{n-1} \cdot \lambda = 3 \cdot 2^n$

לכן $\lambda = 2$ ופתרון פרטי יהיה $a_n = n \cdot 2^{n+1}$. לכן הפתרון הכללי של המשוואה ההתחלתית הוא

$a_n = \alpha \cdot (-1)^n + \beta \cdot 2^n + n \cdot 2^{n+1}$

אם נציב את תנאי ההתחלה נקבל

$\alpha + \beta = 2$

$-\alpha + 2\beta + 4 = 5$

ופתרון המערכת הוא $\alpha = 1, \beta = 1$. לכן הפתרון שאנו מחפשים הוא

$a_n = (-1)^n + 2^n + n \cdot 2^{n+1}$

3. נסמן ב- $a_n$ את מספר הסדרות מאורך n של 1,0 ו-2 כך שאסור ששתי ספרות 2 יופיעו זו ליד זו, כל סדרה כזו יכולה להתחיל בשתי דרכים שונות. האפשרות הראשונה היא שהספרה 2 לא מופיעה בהתחלה (כלומר לא מופיעה משמאל) לכן משמאל מופיעות הספרות 0 או 1 ואז אנו חוזרים לבעיה המקורית רק שכעת נותרו n-1 מקומות, לכן מספר הסדרות במקרה שהספרה 2 לא מופיעה משמאל הוא $2a_{n-1}$ (שתי אפשרויות עבור הבחירה בהתחלה (0 או 1) ואז חזרה לבעיה המקורית עם n-1 מקומות). האפשרות השנייה היא שהספרה 2 תופיע ראשונה משמאל, לאחר מכן אנו חייבים שיופיעו הספרות 0 או 1 ואז אנו חוזרים לבעיה המקורית רק שכעת נותרו n-2 מקומות, לכן מספר הסדרות במקרה שהספרה 2 לא מופיעה משמאל הוא $2a_{n-2}$ (שתי אפשרויות עבור הבחירה למקום ה- n-1 (0 או 1) ואז חזרה לבעיה המקורית עם n-2 מקומות). לכן בסוף נקבל ש- $a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}$ או $a_n - 2a_{n-1} - 2a_{n-2} = 0$. תנאי ההתחלה מתקבלים מבדיקה של המקרים הפרטיים n = 1,2 , אם n = 1 אז יש לנו רק מקום אחד להציב ספרות ואנו יכולים להציב 1,0 או 2, לכן $a_1 = 3$ , אם n = 2 אז יש לנו שני מקומות להציב את הספרות 1,0 או 2 , למשבצת הראשונה יש שלוש אפשרויות וכך גם למשבצת השנייה לכן יש לנו 9 אפשריות אך צריך להוריד את האפשרות שיש שתי ספרות 2 צמודות, לכן $a_2 = 8$. לכן יש לנו את נוסחת הנסיגה עם תנאי ההתחלה: $a_n - 2a_{n-1} - 2a_{n-2} = 0$ $a_1 = 3$, $a_2 = 8$ כדי להגיע לפתרון מפורש נסמן $a_n = x^n$ ונגיע למשוואה $x^2 - 2x - 2 = 0$,

השורשים הם $x=1\pm\sqrt{3}$, לכן הפתרון הכללי נתון לפי : $a_n=\alpha(1+\sqrt{3})^n+\beta(1-\sqrt{3})^n$ ,
נשתמש בתנאי ההתחלה ונקבל: $\begin{matrix}\alpha(1+\sqrt{3})+\beta(1-\sqrt{3})=3\\ \alpha(1+\sqrt{3})^2+\beta(1-\sqrt{3})^2=8\end{matrix}$ והפתרון של המערכת הוא $\alpha=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\sqrt{3},\ \beta=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\sqrt{3}$, לכן הפתרון שאנו מחפשים הוא $a_n=(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\sqrt{3})(1+\sqrt{3})^n+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\sqrt{3})(1-\sqrt{3})^n$.

4. נסמן ב- $a_n$ את מספר הסדרות של 0 ו-1 באורך n כך שיש לפחות זוג של 1-ים הצמודים זה לזה, כל סדרה כזו יכולה להתחיל בשלוש דרכים שונות. האפשרות הראשונה היא שהספרה 0 מופיעה בהתחלה ואז אנו חוזרים לבעיה המקורית רק שכעת נותרו n-1 מקומות, לכן מספר הסדרות במקרה זה הוא $a_{n-1}$. האפשרות השנייה היא שהסדרה מתחילה ברצף .....10 ואז אנו חוזרים לבעיה המקורית רק שכעת נותרו n-2 מקומות, לכן מספר הסדרות במקרה זה הוא $a_{n-2}$. האפשרות השלישית היא שיש שתי ספרות של 1-ים צמודות בהתחלה, במקרה הזה כבר אין צורך לדאוג שבשאר ה- n-2 מקומות יהיו שתי ספרות של 1-ים צמודות לכן מספר האפשרויות במקרה זה הוא $2^{n-2}$. לכן בסוף נקבל ש- $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}+2^{n-2}$ או $a_n-a_{n-1}-a_{n-2}=2^{n-2}$. תנאי ההתחלה מתקבלים מבדיקה של המקרים הפרטיים n = 1,2, אם n = 1 אז אין אפשרות שיהיה זוג של 1-ים צמודים לכן $a_1=0$, אם n = 2 אז כדי שיהיה זוג של 1-ים צמודים צריך שבשני המקומות תופיע הספרה 1, כלומר יש רק אפשרות אחת, לכן $a_2=1$. לכן יש לנו את נוסחת הנסיגה עם תנאי ההתחלה: $a_n-a_{n-1}-a_{n-2}=2^{n-2}$ $a_2=1,a_1=0$

כדי להגיע לפתרון מפורש נמצא קודם פתרון כללי למשוואה ההומוגנית $a_n-a_{n-1}-a_{n-2}=0$, נסמן $a_n=x^n$ ונקבל $x^2-x-1=0$, השורשים של המשוואה הם $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. לכן הפתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית הוא

$$a_n=\alpha(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n+\beta(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$$

כעת נמצא פתרון פרטי למשוואה הלא הומוגנית $a_n-a_{n-1}-a_{n-2}=2^{n-2}$. ננחש פתרון $a_n=\alpha 2^n$ נציב זאת במשוואה ומקבל

$$\alpha 2^n-\alpha 2^{n-1}-\alpha 2^{n-2}=2^{n-2}$$

ולכן $\alpha=1$. לכן הפתרון הכללי למשוואה הלא הומוגנית הוא

$$a_n=\alpha(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n+\beta(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n+2^n$$

נשתמש בתנאי ההתחלה ונקבל:

$$\alpha(\frac{1+\sqrt{5}}{2})+\beta(\frac{1-\sqrt{5}}{2})+2=0$$

$$\alpha(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2+\beta(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^2+4=1$$

ופתרון המערכת הוא $\alpha=-\frac{1}{2}-\frac{3}{10}\sqrt{5},\ \beta=-\frac{1}{2}+\frac{3}{10}\sqrt{5}$. לכן הפתרון שאנו מחפשים הוא:

$$a_n=(-\frac{1}{2}-\frac{3}{10}\sqrt{5})(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n+(-\frac{1}{2}+\frac{3}{10}\sqrt{5})(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n+2^n$$