

83217-תרגיל 1-פתרון:

עבור הקבוצות והפעולות הבאות קבע האם: גרופואיד, קומוטיבי, אסוציאטיבי, אגודה, קיימת יחידה ימנית, קיימת יחידה שמאלית.

1.

$$G = \{x, y, z\}$$

עם

$$\forall a, b \in G \quad a \circ b = \begin{cases} c \in G : c \neq a, b & \text{when } a \neq b \\ a & \text{when } a = b \end{cases}$$

-----  
-----

$$\forall a, b \in G \quad a \circ b = c \in G \quad \text{או} \quad a \in G \Rightarrow (G, \circ)$$

$$a \circ b = \begin{cases} c \in G : c \neq a, b & \text{when } a \neq b \\ a & \text{when } a = b \end{cases} = \begin{cases} c \in G : c \neq a, b & \text{when } b \neq a \\ b & \text{when } a = b \end{cases} = b \circ a \Rightarrow \text{קומוטיבי}$$

לא אסוציאטיבי כיוון שכאשר כולם שונים:

$$(a \circ b) \circ c = c \circ c = c \neq a = a \circ a = a \circ (b \circ c)$$

ולכן לא אגודה.

לא קיימת יחידה ימנית/שמאלית כיוון שיתכן כי  $x, y, z$  שונים וכל אחד נייטרלי לעצמו בלבד.

2.

$G$

עם

$$\forall a, b \quad a \circ b = b * a$$

כאשר נתון  $(G, *)$  אגודה.

-----  
-----

$$\forall a, b \in G \quad b * a \in G \Rightarrow a \circ b \in G \Rightarrow \text{גרופואיד } G$$

לא נתון כי  $*$  קומוטיבי על  $G$  ולכן גם לא ניתן להסיק כי  $\circ$  קומוטיבי על  $G$ .

$$\forall a, b, c \in G \quad (c * b) * a = c * (b * a) \Rightarrow a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c \Rightarrow \text{אסוצ' אגודה}$$

לא ניתן לומר אם קיים איבר נייטרלי היות וזה אינו ידוע לגבי  $(G, *)$ .

3.

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

עם כפל מטריצות.

נבנה ל G את טבלת הפעולה:

•	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

לכן: G גרופאוויד (כל התוצאות ב G), קומוטטיבי (הטבלה סימטרית), אסוצ' (מתוך אסוצ' של כפל מט')

ולכן אגודה, נשים לב כי הטור והשורה של  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  זהים לטור השמאלי והשורה העליונה ולכן

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ הוא יחידה כאן.}$$

4.

G אוסף המילים מעל הא"ב  $\sum$ .

עם

$$\forall w, z \in G \quad w \circ z = waz$$

עבור איזשהו  $a \in \sum$ .

-----  
-----

$$\forall w, z \in G \quad waz \in G \Rightarrow \text{גרופואיד } G$$

לא קומוט'  $waz \neq zaw \Rightarrow$  when  $z \neq w$

$$(w \circ z) \circ h = waz \circ h = wazah = wa(z \circ h) = w \circ (z \circ h) \Rightarrow \text{אסוצ'}$$

אין יחידה ימנית/שמאלית כי תוצאת הפעולה בין כל שתי מילים ארוכה לפחות באות אחת ולכן בהכרח לא שווה לאף אחת מהן.

5.

$G$  אוסף הפונקציות מהממשיים לממשיים.

עם הפעולה  $*$ :

$$\forall f, g \in G \quad f * g = g \circ f^2$$

(כאן  $\circ$  היא הרכבת פונקציות ו  $f^2$  היא הרכבת  $f$  על עצמה)

-----  
-----

$$\forall f, g \in G \quad f * g = g \circ f \circ f : R \rightarrow R \Rightarrow \in G \Rightarrow \text{גרופואיד}$$

לא קומוטטיבי בשל היעדר קומוטטיביות כללית בהרכבת פונקציות.

$$(f * g) * h = (g \circ f^2) * h = h \circ (g \circ f^2) \circ (g \circ f^2)$$

לא אסוצ' כי:

$$f * (g * h) = f * (h \circ g^2) = (h \circ g^2) \circ f^2$$

ולכן לא אגודה.

אין יחידה ימנית כי:

$$f = f * g = g \circ f^2 \Rightarrow g \circ f = Id \Rightarrow \text{לא תמיד קורה}$$

$Id$  יחידה שמאלית כי:

$$\forall f \in G \quad Id * f = f \circ Id^2 = f$$