83-217-תרגיל 2:

1.בדוק האם קבוצת המספרים הממשיים R מהווה חבורה למחצה לגבי הפעולות הבינאריות הבאות:

א) $a*b = a^2 + ab$

ב) $a*b = \sqrt{a+b}$

ג) $a*b = (a^2 + b^2)/2$

2. נסמן ב- R את קבוצת המספרים הממשיים. תהי

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & A & B \\ 0 & 1 & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid A, B, C \in R \right\}$$

הוכח ש- G היא חבורה ביחס לכפל מטריצות. האם היא אבלית?

3. יהי G מונואיד, k מספר טבעי. נסמן:

$$G^k = \{g^k \mid g \in G\}$$

א) הוכח כי אם G אבלית, אזי G^k מונואיד אבלי.

ב) אילו דרישה מהדרישות עבור מונואיד לא מתקיימת לגבי G^k, אם G אינה אבלית?

ג) הוכח כי אם בנוסף G חבורה אבלית, אז G^k גם חבורה אבלית.

4. א) האם הקבוצות הבאות הן חבורות (הפעולה היא פעולת החיבור)?

(1) $H = \{\log(a) : 0 < a \in Q\}$

(2) $H = \{\log(n) : 0 < n \in N\}$

(3) $H = \{x \in R : \tan(x) \in Q\}$

ב) הוכיחו: $Q^C = R \setminus Q$ אינה חבורה עם פעולת החיבור.

5. נסתכל על הקבוצה A $R \cup \{\infty\}$. נגדיר את הפעולה $a*b = \dfrac{a+b}{1-ab}$ (כשמספר לחלק ל- 0 שווה ל- ∞, ו- $\infty * b = b * \infty = -\dfrac{1}{b}$). האם (A,*) היא חבורה למחצה? מונואיד? חבורה?