<u>83-217-תרגיל 2-פתרון:</u>

1.בדוק האם קבוצת המספרים הממשיים R מהווה חבורה למחצה לגבי הפעולות הבינאריות הבאות:

א) $a*b=a^2+ab$

לא, חסרה אסוצ'.

ב) $a*b=\sqrt{a+b}$

לא, אין סגירות לממשיים.

ג) $a*b=(a^2+b^2)/2$

לא, חסרה אסוצ'.

2. נסמן ב- R את קבוצת המספרים הממשיים. תהי

$$G=\{\begin{pmatrix}1 & A & B\\ 0 & 1 & C\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \mid A,B,C\in R\}$$

סגירות: מלנארית 1 ידוע כי מכפלת מטריצות משולשיות עליוניות היא משולשית עליונה.
אסוצ': מתוך אסוצ' של מכפלת מטריצות.
יחידה: מט' I מתפקדת יחידה לכל המט' ובפרט למשולשיות העליונות וכמו כן היא אלכסונית ובפרט משולשית לכן ב G.
הפיך: הדט' שונה מאפס לכן ודאי הפיכות, נוודא שההפיכות ב G :

$$\begin{pmatrix}1 & A & B\\ 0 & 1 & C\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}=I$$

$$\Downarrow$$

$$3,1 \quad entry: g=0$$

$$2,1 \quad entry: \quad d+cg=0\Rightarrow d=0$$

$$3,2 \quad entry: h=0$$

לכן ההפיכה גם משולשית עליונה ולכן ב G.

האם היא אבלית?

$$\begin{pmatrix}1 & A & B\\0 & 1 & C\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a & b\\0 & 1 & c\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & a+A & b+Ac+B\\0 & 1 & c+C\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & a & b\\0 & 1 & c\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & A & B\\0 & 1 & C\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & A+a & B+aC+b\\0 & 1 & C+c\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

לא.

3. יהי G מונואיד, k מספר טבעי. נסמן:

$$G^k = \{g^k \mid g \in G\}$$

א) הוכח כי אם G אבלית, אזי G^k מונואיד אבלי.

סגירות: נניח ש- $a,b \in G^k$. ז"א הם מהצורה $a = c^k$, $b = d^k$. לכן – $a*b = c^k*d^k = (cd)^k \in G^k$.
השיוויון האחרון אפשרי כי G אבלית.

אסוציאטיביות: כי G^k מוכלת ב- G, ולכן יורשת את האסוציאטיביות שלה.

איבר היחידה של G שייך ל- G^k, כי כל חזקה של איבר היחידה היא הוא עצמו.

אבליות – נובעת מההכלה ב- G.

ב) אילו דרישה מהדרישות עבור מונואיד לא מתקיימת לגבי G^k, אם G אינה אבלית?

הסגירות אינה מתקיימת.

ג) הוכח כי אם בנוסף G חבורה אבלית, אז G^k גם חבורה אבלית.

נשאר לבדוק סגירות להופכי (סגירות לכפל, אסוצ' ויחידה בדקנו ב-א). יהי $a \in G^k$. ז"א – $a = c^k$, כש- $c \in G$. אזי – $a^{-1} = (c^k)^{-1} = (c^{-1})^k \in G^k$.

4. . א) האם הקבוצות הבאות הן חבורות (הפעולה היא פעולת החיבור)?
(1) $H = \{\log(a) : 0< a \in Q\}$
(2) $H = \{\log(n) : 0< n \in N\}$
(3) $H = \{x \in R : \tan(x) \in Q\}$
ב) הוכיחו: $Q^C = R \setminus Q$ אינה חבורה עם פעולת החיבור.

א1.כן.
סגירות-נקח $\log a, \log b$ כך ש-a,b רציונאליים חיוביים ואז:$\log a + \log b = \log ab$ ואם $a,b \in Q$
אז $ab \in Q$ לכן $\log ab$ בקבוצה ,קיימת סגירות.

אסוצ'- מתוך אסוצ' של חיבור.

יחידה: $\log 1=0$ נייטרלי לחיבור.

הופכי-נקח $loga$ כך ש- $a \in Q$ אזי $loga = loga^{-1}$
והרי $\frac{1}{a}$ רציונאלי חיובי ולכן גם ההופכי נמצא בקבוצה.

א2. לא.
ההופכי ל-$logn$ הוא $log\frac{1}{n}$ אינו ב-H כי אם $n \in N$ אז $\frac{1}{n}$ לא ב-N ולכן לא קיים הופכי
ולכן H אינה חבורה.

א3. לא.
אין סגירות לחיבור:
נקח $y = \pi/4,\ x = \pi/4$ $\quad 1 = tg\,\pi/4 \in Q$ **אבל** $x + y = \frac{\pi}{2}$ ו- $tg\,\pi/2 = tg(\pi/4 + \pi/4)$
אינו מוגדר!

ב. Q^c אינה חבורה כי 0 אינו ב- Q^c כלומר אין איבר נייטרלי ב-Q^c.

5. נסתכל על הקבוצה A $\quad R \cup \{\infty\}$. נגדיר את הפעולה $a * b = \frac{a+b}{1-ab}$ (כשמספר לחלק ל- 0 שווה ל- ∞, ו- $\infty * b = b * \infty = -\frac{1}{b}$). האם (A,*) היא חבורה למחצה? מונואיד? חבורה?

הפעולה מוגדרת כ- $a * b = \frac{a+b}{1-ab}$ כאשר $b * \frac{1}{b} = \frac{1}{b} * b = \infty$ ו- $\infty * b = b * \infty = -\frac{1}{b}$.

<u>סגירות:</u>
ב- R^* ישנה סגירות של הפעולות, לכן הפעולות הנוספות שהגדרנו (חילוק ב-0 ופעולה עם ה"אינסוף") משלימים את הסגירות של הכפל ב- A.
לפני שנבדוק האם הקבוצה עם הפעולה היא חבורה נראה שהפעולה קומוטטיבית:
$a * b = \frac{a+b}{1-ab} = \frac{b+a}{1-ba} = b * a$, והקומוטטיביות מתקיימת גם עבור הפעולות הספציפיות שהגדרנו.
<u>אסוציאטיביות:</u>

$$(a*b)*c = \left(\frac{a+b}{1-ab}\right)*c = \frac{\left(\frac{a+b}{1-ab}+c\right)}{1-\frac{(a+b)c}{1-ab}} = \frac{a+b+(1-ab)c}{1-ab-(a+b)c} = \frac{a+b+c-abc}{1-ab-ac-bc}$$

$$a*(b*c) = a*\left(\frac{b+c}{1-bc}\right) = \frac{\left(a+\frac{b+c}{1-bc}\right)}{1-\frac{a(b+c)}{1-bc}} = \frac{a(1-bc)+b+c}{1-bc-a(b+c)} = \frac{a-abc+b+c}{1-bc-ab-ac}$$

פעולות החיבור והכפל ב-R הינן קומוטטיביות לכן $\frac{a+b+c-abc}{1-ab-ac-bc} = \frac{a-abc+b+c}{1-bc-ab-ac}$ ומכאן:
$(a*b)*c = a*(b*c)$.
נותר לבדוק אסוציטיביות עבור הפעולות שהגדרנו עם אינסוף

$$(a*b)*\infty=\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)*\infty=-\left(\frac{1-ab}{a+b}\right)=\frac{ab-1}{a+b}$$

$$a*(b*\infty)=a*\left(-\frac{1}{b}\right)=\frac{a-\frac{1}{b}}{1+\frac{a}{b}}=\frac{ab-1}{b+a}=\frac{ab-1}{a+b}$$

מהאסוציטיביות הזאת ובעזרת הקומוטטיביות ניתן להראות שהפעולה עם ∞ אסוציטיבית בכל מקום בו ה- ∞ לדוגמא כאשר ∞ הוא הביטוי הראשון:

$$\infty*(a*b)=\infty*(b*a)=(b*a)*\infty=b*(\infty*a)=(\infty*a)*b:$$

ובצורה דומה ניתן לעשות כאשר הוא הביטוי השני.

לכן הפעולה אסוציאטיבית.

<u>איבר יחידה:</u>

0 הוא איבר היחידה:

$$\infty*0=0*\infty=-\frac{1}{0}=\infty \quad a*0=0*a=\frac{a+0}{1-0}=a$$

ונזכיר כי בכל חבורה אם איבר היחידה קיים אז הוא יחיד.

<u>איבר הופכי:</u>

מכיוון ש-0 הוא איבר היחידה ננסה לבדוק את האיבר הנגדי:

$$a*-a=\frac{a-a}{1+a^2}=0$$

עבור ∞ ההופכי הוא ∞ 0 $\infty*\infty=-\frac{1}{\infty}=0$.

מתקיימות כל 4 אקסיומות החבורה ולכן $R\cup\{\infty\}$ עם הפעולה שהגדרנו היא חבורה.