88217-תרגיל 3-פתרון:

1. תהי $G=\{a_1,...,a_n\}$ חבורה קומוטטיבית. $b=a_1\cdots a_n$. הוכח:

א. $b^2=e_G$

G חבורה, לכן לכל איבר a_i קיים הופכי a_j ב G ולכן: $b=\prod a_i=\prod a_i^{-1}$ -היות ו G קומוטטיבית סדר המכפלה איננו משנה ולכן: $b^2=\prod a_i\prod a_i^{-1}=\prod a_i a_i^{-1}=e$.

ב. אם אין בG איבר מסדר 2 אז b=e .

$$b^2=e\Rightarrow order \quad of \quad b \quad is \quad 1 or 2$$

אך אין איבר מסדר 2 לכן $b=b^1=e$.

ג. אם יש ב G איבר יחיד מסדר 2 אז הוא b .

בלי הגבלת הכלליות, יהי a_1 האיבר היחיד ב G מסדר 2, לכן לכל j=2,…,n a_j איננו מסדר 2, כלומר $\exists k: a_k=e\wedge\forall j\neq 1,k \quad {a_j}^2\neq e\Rightarrow\forall j\neq 1,k \quad a_j\neq a_j^{-1}$

כעת נתבונן ב $b=a_1\cdots a_n$ ונסדר כל איבר שאיננו a_1,e בצמוד להופכי שלו אשר כאמור שונה מעצמו ונקבל: $b=a_1\cdot e\cdot\prod_{j\neq 1,k}a_j a_j^{-1}=a_1$ כנדרש.

2. בטאו את התמורות הבאות כמכפלת מחזורים זרים ומיצאו $\pi\circ\sigma,\sigma\circ\pi,\pi^{-2},\sigma^3$:

$$\pi=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&2&5&1&3&4\end{pmatrix}=(1\quad 6\quad 4)(2)(3\quad 5),\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&3&5&6&2&4\end{pmatrix}=(1)(2\quad 3\quad 5)(4\quad 6)$$

$$\pi^{-2}=\left(\pi^2\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&2&3&6&5&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&2&3&1&5&4\end{pmatrix},\sigma^3=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&2&2&6&5&4\end{pmatrix}$$

$$\pi\circ\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&5&3&4&2&1\end{pmatrix},\sigma\circ\pi=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&3&2&1&5&6\end{pmatrix}$$

3. כזכור איזומורפיזם של חבורות $f:G\to H$ שומר פעולה, חח"ע ועל. הוכיחו:

א. שהוא גם מעביר יחידה ליחידה (כלומר: $f(e_G)=e_H$).

$$\forall a\in G \qquad f(a)f(e)=f(ae)=f(a)=f(ea)=f(e)f(a)\Rightarrow f(e_G)=e_H$$

$$\longleftrightarrow$$

ב. שהוא גם מעביר הופכי להופכי (כלומר: $f(a^{-1})=(f(a))^{-1}$).

$$\forall a\in G \qquad f(a)f(a^{-1})=f(aa^{-1})=e_H=f(e_G)=f(a^{-1}a)=f(a^{-1})f(a)\Rightarrow f(a^{-1})=(f(a))^{-1}$$

$$\longleftrightarrow$$

ג.הוא גם מעביר חזקה לחזקה (כלומר: $f(a^n)=(f(a))^n$).

$$\forall n \in N \qquad f\left(a^{n}\right)=f(a \cdot \ldots \cdot a) \underset{\substack{\text{שומר} \\ \text{פעולה}}}{=} f(a) \cdot \ldots \cdot f(a)=(f(a))^{n}$$

$$\forall -n : n \in N \qquad \text{ב}+\uparrow$$

$$n=0 : \text{א'}$$

ד.שסדר איבר בתחום הוא כסדר תמונתו בטווח(כלומר: $a^{m}=e_{G} \Rightarrow (f(a))^{m}=e_{H}$).

$$a^{m}=e_{G} \Rightarrow e_{H} \underset{\text{א}}{=} f(e_{G})=f\left(a^{m}\right) \underset{\text{ג}}{=} (f(a))^{m}$$

4.הראה כי $\left(Z_5^{x}, \times\right) \cong (Z_4,+)$.

$f:\{1,2,3,4\} \rightarrow \{0,1,2,3\}$

$f(1)=0$

$f(2)=2$

$f(3)=3$

$f(4)=1$

הוגדר ע"מ שטבלת הפעולה של התחום תעבור באופן חח"ע ועל לטווח:

x	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

$\rightarrow$

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

G.5 חבורה קומוטטיבית, $g,h \in G : g^{2}=h^{3}=e_{G}$ (כלומר 2 סדר של g ו 3 סדר של h).

מהו הסדר של gh ?

טענה: הסדר 6.

הוכחה:

הסדר איננו 1: כי אז $gh=e \Rightarrow g^{-1}=h$ אבל $g^{2}=e \Rightarrow g^{-1}=g$ לכן g=h בסתירה לכך שסדרם שונה.

הסדר איננו 2: כי אז $e=ghgh=gghh=ehh=hh$ בסתירה לכך שסדר h הוא 3.

הסדר איננו 3: כי אז $e=ghghghgh=ggghhh=ggg=eg=g$ בסתירה לכך שסדר g הוא 2.

הסדר איננו 4: כי אז $e=ghghghgh=gggghhhh=eeeh=h$ בסתירה לכך שסדר h הוא 3.

הסדר איננו 5: כי אז $e=ghghghghgh=ggggghhhhh=eegeh=gh$ חזרה לסתירה הראשונה.

הסדר הוא 6: כי $ghghghghghgh=gggggghhhhhh=(eee)(ee)=e$ ושום חזקה נמוכה יותר לא תיתן זאת.

6. מצאו ב S_3 אייברים g,h כבשאלה 5. מהו סדר gh? האם זה מהווה סתירה ל 5?

$((1 \quad 2)(3))^2 = id$

$(1 \quad 2 \quad 3)^3 = id$

$(1 \quad 2 \quad 3) \circ (1 \quad 2)(3) = (1 \quad 3)(2)$

$((1 \quad 3)(2))^2 = id \Rightarrow the \quad order \quad = 2$

לא, כיוון ש S_3 איננה קומוטטיבית.