## <u>תרגיל 4-83-217:</u>

1. מבלי להסתמך על השאלה מדף קודם הוכח: אם G חבורה קומוטטיבית אז
$$\forall a,b\in G \qquad (ab)^{-1}=a^{-1}b^{-1}$$

2. כזכור איזומורפיזם של חבורות $f:G\to H$ שומר פעולה, חח"ע ועל. הוכיחו:
   א. שהוא גם מעביר יחידה ליחידה (כלומר: $f(e_G)=e_H$).
   ב. שהוא גם מעביר הופכי להופכי (כלומר: $f(a^{-1})=(f(a))^{-1}$).
   ג. שהוא גם מעביר חזקה לחזקה (כלומר: $f(a^n)=(f(a))^n$).
   ד. שסדר איבר בתחום הוא כסדר תמונתו בטווח(כלומר:
$$\begin{array}{l} a^m=e_G \Leftrightarrow (f(a))^m=e_H \\ a^{m-1}\neq e_G \Leftrightarrow (f(a))^{m-1}\neq e_H \end{array}$$
).

3. $\varphi:(G,*)\to(H,\cdot)$ הומומורפיזם של חבורות. הוכח $\varphi$ חח"ע $\Leftrightarrow \ker(\varphi)=\{e_G\}$.

4. עבור הסעיפים הבאים הוכח כי ההעתקה היא הומומורפיזם של חבורות ומצא גרעין ותמונה:
   א. $\varphi:(Z,+)\to(Z,+):\forall z\in Z \qquad \varphi(z)=2z$
   ב. $\varphi:(C\setminus\{0\},\times)\to(C\setminus\{0\},\times):\forall z\in C\setminus\{0\} \qquad \varphi(z)=z^4$

5. א.הראה כי $(Z_4,+)\cong(Z_5{}^x,\times)$.
   ב. הראה כי כל שתי חבורות ציקליות מאותו סדר-סופי,או ששתיהן מסדר אינסופי, הן איזומורפיות.

6. תהי G חבורה.

   א. נגדיר את מרכז G להיות $Z(G)=\{x\in G: xg=gx \qquad \forall g\in G\}$ (כלומר קבוצת האייברים בG המתחלפים עם כולם). הוכח $Z(G)\le G$.

   ב. $H\subseteq G$ תת-גרופואיד כך ש $H\neq\phi$ קב' סופית(=מונה מס' סופי של אייברים). הוכח $H\le G$.