217-83-תרגיל 4-פתרון:

1. מבלי להסתמך על השאלה מדף קודם הוכח: אם G חבורה קומוטטיבית אז

$$\forall a,b\in G \qquad (ab)^{-1}=a^{-1}b^{-1}$$

$$(ab)(a^{-1}b^{-1}) \underset{\text{אסוציאטיבי}}{=} a(ba^{-1})b^{-1} \underset{\text{קומוטטיבי}}{=} a(a^{-1}b)b^{-1}=ee=e=ee=a^{-1}(ab^{-1})b=a^{-1}(b^{-1}a)b=(a^{-1}b^{-1})(ab)$$

$$\leftarrow\rightarrow$$

$$\Downarrow$$

$$(ab)^{-1}=a^{-1}b^{-1}$$

2. כזכור איזומורפיזם של חבורות $f:G\to H$ שומר פעולה, חח"ע ועל. הוכיחו:

א. שהוא גם מעביר יחידה ליחידה (כלומר: $f(e_G)=e_H$).

$$\forall a\in G \qquad f(a)f(e)=f(ae)=f(a)=f(ea)=f(e)f(a)\Rightarrow f(e_G)=e_H$$

$$\leftarrow\rightarrow$$

ב. שהוא גם מעביר הופכי להופכי (כלומר: $f(a^{-1})=(f(a))^{-1}$).

$$\forall a\in G \qquad f(a)f(a^{-1})=f(aa^{-1})=e_H=f(e_G)=f(a^{-1}a)=f(a^{-1})f(a)\Rightarrow f(a^{-1})=(f(a))^{-1}$$

$$\leftarrow\rightarrow$$

ג.הוא גם מעביר חזקה לחזקה (כלומר: $f(a^n)=(f(a))^n$).

$$\forall n\in N \qquad f(a^n)=f(a\cdot\ldots\cdot a)\underset{\text{שומר פעולה}}{=}f(a)\cdot\ldots\cdot f(a)=(f(a))^n$$

$\forall -n: n\in N \qquad$ ב+$\uparrow$

$n=0$:א'

ד.שסדר איבר בתחום הוא כסדר תמונתו בטווח(כלומר: $a^m=e_G\Rightarrow (f(a))^m=e_H$).

$$a^m=e_G\Rightarrow e_H\underset{\text{א}}{=}f(e_G)=f(a^m)\underset{\text{ג}}{=}(f(a))^m$$

אם $a^{m-1}\neq e_G\wedge e_H=(f(a))^{m-1}$ אז

$f(e_G)=e_H=(f(a))^{m-1}=f(a^{m-1})$ בסתירה לחח"ע f .

3. $\varphi:(G,*)\to(H,\cdot)$ הומומורפיזם של חבורות. הוכח φ חח"ע $\Leftrightarrow$ $\ker(\varphi)=\{e_G\}$.

$$\Rightarrow\ :\ \varphi(a)=\varphi(b)\Rightarrow\varphi(a)\cdot(\varphi(b))^{-1}=e_H \underset{\substack{\text{שומר}\\ \text{פעולה}}}{\Rightarrow} \varphi\left(a*b^{-1}\right)=e_H \underset{\ker\varphi=e}{\Rightarrow} a*b^{-1}=e_G\Rightarrow a=b\Rightarrow \text{חח"ע}\quad \varphi$$

$$\Leftarrow\ :\ \forall a\in\ker\varphi \qquad \varphi(a)=e_H=\varphi(e_G)\underset{\substack{\varphi\\ \text{חח"ע}}}{\Rightarrow} a=e_G$$

4. עבור הסעיפים הבאים הוכח כי ההעתקה היא הומומורפיזם של חבורות ומצא גרעין ותמונה:

א. $\varphi:(Z,+)\to(Z,+): \forall z\in Z \qquad \varphi(z)=2z$

ההעתקה מוגדרת על חבורה כפי שהוכחנו עבור Z עם + בכיתה.

$$\varphi(a+b)=2(a+b)=2a+2b=\varphi(a)+\varphi(b)$$

$$\ker\varphi=\{a\in Z:2a=0\}=\{0\}\Rightarrow \text{חח"ע}$$

$$\operatorname{Im}\varphi=\{\varphi(z):z\in Z\}=\{2z:z\in Z\}=2Z\Rightarrow \text{לא}\quad\text{על}$$

ב. $\varphi:(C\setminus\{0\},\times)\to(C\setminus\{0\},\times): \forall z\in C\setminus\{0\} \qquad \varphi(z)=z^4$

ההעתקה מוגדרת על חבורה היות וקיימת סגירות ואסוציאטיביות ביחס לכפל, כמו כן 1 היחידה בפנים והיות והסרנו את 0 לכולם יש הפיכים.

$$\varphi(ab)=(ab)^4=a^4b^4=\varphi(a)\varphi(b)$$

$$\ker\varphi=\{a\in C\setminus\{0\}:a^4=1\}=\{4\quad\text{מסדר}\quad\text{יחידה}\quad\text{שורשי}\}=\{1,-1,i,-i\}\Rightarrow \text{חח"ע}\quad\text{לא}$$

$$\operatorname{Im}\varphi=\{a^4:a\in C\setminus\{0\}\}=C\setminus\{0\}\Rightarrow \text{על}\begin{pmatrix}\forall y\in C\setminus\{0\} \qquad \sqrt[4]{y}\in C\setminus\{0\}\Rightarrow\exists x\in C\setminus\{0\}:x=\sqrt[4]{y}\Rightarrow\\ \forall y\in C\setminus\{0\}\quad \exists x\in C\setminus\{0\}:y=x^4=\varphi(x)\end{pmatrix}$$

5. א.הראה כי $(Z_4,+)\cong\left(Z_5^{\,x},\times\right)$.

$$f:\{1,2,3,4\}\to\{0,1,2,3\}$$
$$f(1)=0$$
$$f(2)=1$$
$$f(3)=3$$
$$f(4)=2$$

הוגדר ע"מ שטבלת הפעולה של התחום תעבור באופן חח"ע ועל לטווח:

x	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3 →
3	3	1	4	2
3	3	0	1	2

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
4	4	3	2	1

ב. הראה כי כל שתי חבורות ציקליות מאותו סדר-סופי,או ששתיהן מסדר אינסופי, הן איזומורפיות.

יהיו $G=\langle a\rangle, H=\langle b\rangle$ שתי חב' ציקליות מאותו סדר. נגדיר:

$\varphi: G \to H : f(a^i) = b^i$

$\Downarrow$

$\forall f = a^i, g = a^j \in G$

$\varphi(fg) = \varphi(a^i a^j) = \varphi(a^{i+j}) = b^{i+j} = b^i b^j = \varphi(a^i)\varphi(a^j) = \varphi(f)\varphi(g) \Rightarrow$ הומומ'

$\ker\varphi = \{g \in G : \varphi(g) = e\} = \{g \in G : \varphi(a^i) = b^i = e\} \Rightarrow$ סדר b הוא i $\Leftarrow$ סדר a הוא i $\Leftarrow g = a^i = e$ $\Rightarrow \ker\varphi = \{e\} \Rightarrow \varphi$ חח"ע

$\mathrm{Im}\varphi = \{\varphi(g) : g \in G\} = \{\varphi(a^i) : i \in Z\} = \{b^i ; i \in Z\} = H \Rightarrow$ על

6. תהי G חבורה.

א. נגדיר את מרכז G להיות $Z(G) = \{x \in G : xg = gx \quad \forall g \in G\}$ (כלומר קבוצת האייברים בG המתחלפים עם כולם). הוכח $Z(G) \leq G$.

סגירות:

$\forall a,b \in Z(G) \quad ag = ga, bg = gb \ \ \forall g \in G$ (ובפרט מתחלפים אחד עם השני)

$\Rightarrow abg = agb = gab = gba \ \ \forall g \in G \Rightarrow ab \in Z(G)$

הפיכים:

$\forall a \in Z(G) \quad ag = ga \quad \forall g \in G \Rightarrow ga^{-1} = a^{-1}g \quad \forall g \in G \Rightarrow a^{-1} \in Z(G)$

ב. $H \subseteq G$ תת-גרופואיד כך ש $H \neq \phi$ קב' סופית(=מונה מס' סופי של אייברים). הוכח $H \leq G$.

סגירות נתונה מתוך תכונת הגרופואיד של H, נבדוק הפיכים:

H סגורה לכן $a^i \in H \quad \forall a \in H, \forall i \in Z$,

H סופית ולכן $\forall a \in H \quad \exists m_a \in N : a^{m_a} = e$ (כלומר סדר כל איבר ב H הוא סופי)

ולכן: $\forall a \in H \quad a^{-1} = a^{m_a - 1} \in H$