## 83-217-תרגיל 7:

1. בקבוצת המספרים השלמים $\mathbf{Z}$ נגדיר את פעולות החיבור והכפל הבאות(שימו לב לא להתבלבל בין 0,1 של השלמים לבין $0_Z, e$ של החוג):

$$a \oplus b = a + b - 1$$

$$a \otimes b = a + b - ab$$

א. הוכח כי מבנה זה הוא חוג ומצא את איבר ה- 0 ואת איבר היחידה בחוג זה.

ב. בדוק: האם החוג קומוטטיבי/חוג חילוק/בעל מחלקי אפס/שדה.

2.

א. הוכח כי הקבוצה $\Re[\sqrt{2}] = \{r + \sqrt{2} \cdot s : r, s \in \Re\}$ היא חוג קומוטטיבי ביחס לפעולות החיבור והכפל במספרים ממשיים.

ב. מצא את $(3 + 4\sqrt{2})^{-1}$ (לא לשכוח שעליו להיות ב- $\Re[\sqrt{2}]$).

רמז: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

3. מצא דוגמא לחוג סופי (=עם מספר סופי של איברים) שאינו קומוטטיבי.

4. יהא $\mathrm{F}$ שדה ממאפיין ראשוני $p$. הוכח שלכל $a, b \in \mathrm{F}$ מתקיים $(a+b)^p = a^p + b^p$.

<u>רמז</u>: 1. יהא $p$ מספר ראשוני. נסמן $\binom{p}{k} := \frac{p!}{k!(p-k)!}$ (מספר האפשרויות לבחירת תת קבוצה מגודל k מתוך קבוצה מגודל n, כלומר-מספר שלם). לכל $0 < k < p$, $p \mid \binom{p}{k}$, שכן $p$ מחלק את המונה של הביטוי, וזר למכנה שלו (שימו לב: $0!=1$).

2. השתמש בנוסחת הבינום של ניוטון $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.