83-217-תרגיל 7-פתרון:

1. בקבוצת המספרים השלמים **Z** נגדיר את פעולות החיבור והכפל הבאות:

$$a\oplus b=a+b-1$$
$$a\otimes b=a+b-ab$$

א. הוכח כי מבנה זה הוא חוג ומצא את איבר ה- 0 ואת איבר היחידה בחוג זה.

$\oplus$:

- $\forall a,b\in Z\Rightarrow a+b\in Z\Rightarrow a+b-1=a\oplus b\in Z$
- $a\oplus(b\oplus c)=a\oplus(b+c-1)=a+b+c-1-1=a+b-1+c-1=(a\oplus b)+c-1=(a\oplus b)\oplus c$
- $\forall a\in Z\quad a=a\oplus 0_Z=a+0_Z-1\Rightarrow 0_Z=1\in Z$
- $\forall a\in Z\quad 1=a\oplus(-a)=a+(-a)-1\Rightarrow(-a)=-a+2\in Z$
- קומוטטיבי מתוך קומוט' החיבור הרגיל

$\otimes$:

- $\forall a,b\in Z\quad a+b,ab\in Z\Rightarrow a+b-ab=a\otimes b\in Z$
- $a\otimes(b\otimes c)=a\otimes(b+c-bc)=a+b+c-bc-a(b+c-bc)=a+b+c-bc-ab-ac+abc=$
$a+b-ab+c-c(b+a-ab)=(a\otimes b)+c-c(a\otimes b)=(a\otimes b)\otimes c$
- $\forall 0_Z\neq a\in Z\quad a=a\cdot e=a+e-ae\Rightarrow 0=e(1-a)\Rightarrow e=0\in Z$

ב. בדוק: האם החוג קומוטטיבי/חוג חילוק/בעל מחלקי אפס/שדה.

- $a\otimes b=a+b-ab=b+a-ba=b\otimes a\Rightarrow$ קומוטטיבי
- $0=e=a\otimes(a^{-1})=a+(a^{-1})-a(a^{-1})\Rightarrow -a=(a^{-1})(1-a)\Rightarrow \underset{Z\text{ לא בהכרח ב- }}{\dfrac{-a}{1-a}}\Rightarrow$ לא חו"ח $\Rightarrow$ לא שדה
- $a,b\neq 0_Z=1: a\otimes b=0_Z=1$: נחפש

$1=a\otimes b=a+b-ab\Rightarrow 1-a=b(1-a).\quad a\neq 1\Rightarrow\underset{\text{סתירה}}{b=1}$

2.

א. הוכח כי הקבוצה $\Re[\sqrt{2}]=\{r+\sqrt{2}\cdot s: r,s\in\Re\}$ היא חוג קומוטטיבי ביחס לפעולות החיבור והכפל במספרים ממשיים.

$+:$

- $(a+\sqrt{2}b)+(c+\sqrt{2}d)=a+c+\sqrt{2}(b+d)\in R[\sqrt{2}]$
- אסוציאטיבי מתוך אסוצ' החיבור
- $\forall a+\sqrt{2}b\in R[\sqrt{2}] \quad a+\sqrt{2}b=a+\sqrt{2}b+0\Rightarrow 0_{R[\sqrt{2}]}=0\in R[\sqrt{2}]$
- $\forall a+\sqrt{2}b\in R[\sqrt{2}] \quad 0=a+\sqrt{2}b+(-a-\sqrt{2}b)\Rightarrow -(a+\sqrt{2}b)=-a-\sqrt{2}b\in R[\sqrt{2}]$
- קומוטטיבי מתוך קומוט' החיבור

$\times:$

- $(a+\sqrt{2}b)\cdot(c+\sqrt{2}d)==ac+2bd+\sqrt{2}(ad+bc)\in R[\sqrt{2}]$
- אסוציאטיבי מתוך אסוצ' הכפל
- $\forall a+\sqrt{2}b\in R[\sqrt{2}] \quad a+\sqrt{2}b=(a+\sqrt{2}b)\cdot 1\Rightarrow e_{R[\sqrt{2}]}=1=1+\sqrt{2}\cdot 0\in R[\sqrt{2}]$
- קומוטטיבי מתוך קומוט' הכפל

ב. מצא את $(3+4\sqrt{2})^{-1}$.

$$a\in R[\sqrt{2}]: a\cdot(3+4\sqrt{2})=1\Rightarrow a=\frac{1}{3+4\sqrt{2}}=\frac{3-4\sqrt{2}}{\left(3-4\sqrt{2}\right)\left(3+4\sqrt{2}\right)}=\frac{3-4\sqrt{2}}{9-32}=\frac{3-4\sqrt{2}}{23}$$

3. מצא דוגמא לחוג סופי (=עם מספר סופי של איברים) שאינו קומוטטיבי.

$M_2(\mathbf{Z}_2)$ מטריצות 2X2 מעל השלמים מודולו 2 (כלומר כל רכיבי המטריצות הם 0 או 1),כלומר 2^4 איברים, אבל:

$$\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}.$$

4. ע"פ נוסחת הבינום עבור n=p :

$$\left(a+b\right)^p=\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}a^kb^{p-k}=\binom{p}{0}a^0b^p+\sum_{k=1}^{p-1}\binom{p}{k}a^kb^{p-k}+\binom{p}{p}a^pb^{p-p}=b^p+\sum_{k=1}^{p-1}\binom{p}{k}a^kb^{p-k}+a^p$$

כמו כן $\binom{p}{k}=\frac{p!}{k!(p-k)!}=p\frac{(p-1)!}{k!(p-k)!}$. p ראשוני וכל המספרים במכנה קטנים ממנו ולכן זרים לו ולא מצמצמים אותו (אלא אם כן אחד מהם הוא !0 ואז השני חייב להיות !p ולצמצם אותו) ולכן ע״ס תרגיל מהכיתה:

$$\forall r\in F \qquad \binom{p}{k}\cdot r=p\cdot\binom{p-1}{k}\cdot r=p\cdot r'=0,\ \ r'\in F$$