217-83-תרגיל 9-פתרון:

1. פתור את המשואה (אם אפשר):
א. $12x \equiv 5 (\bmod 29)$ $x=-2=27$
ב. $12x \equiv 5 (\bmod 38)$ אין פתרון מכיוון ש $\gcd(38,12)=2$ ו- 2 לא מחלק את 5.
ג. $12x \equiv 5 (\bmod 65)$ $x=-5=60$

2. מצא את ה gcd של הפולינומים הבאים ובטא אותו כצ"ל שלהם:
א. $\gcd(x^4-1, x^3-1) = x-1 = (x^4-1) - x(x^3-1)$
ב.
$$\gcd(x^5+6x^4+5x^3-x^2-6x-5, 2x^3+12x^2+10x) = -x^2-6x-5$$
$$= (x^5+6x^4+5x^3-x^2-6x-5) - \tfrac{1}{2}x^2(2x^3+12x^2+10x)$$

3. משפט: יהי $p(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n \in \mathbf{Z}[x]$ פולינום במקדמים שלמים אם $\frac{k}{l} \in \mathbb{Q}$ (שבר מצומצם) הוא שורש רציונלי של הפולינום אזי $k \mid a_0$ ו- $l \mid a_n$.
א. אם $\frac{k}{l} \in \mathbb{Q}$ הוא שורש של $p(x) = 4x^3 - 2x^2 - x - 1$ אזי $k \mid 1$ ו- $l \mid 4$. לכן האפשרויות לשורשים הן $\{\pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{2}, \pm 1\}$ ע"י בדיקה ישירה נראה ש 1 הוא שורש וע"י חילוק פולינומים נקבל $p(x) = 4x^3 - 2x^2 - x - 1 = (x-1)(4x^2+2x+1)$.
נמשיך כנ"ל עבור $4x^2+2x+1$. שוב השורשים האפשריים הם $\{\pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{2}, \pm 1\}$ וע"י בדיקה ישירה נראה שאין לפולינום זה שורשים ולכן הוא אי פריק (אם הוא היה פריק הוא היה צריך להתפרק לשני פול' ממעלה 1 ז"א שהיו צריכים להיות לו שני שורשים) בסה"כ
$p(x) = 4x^3 - 2x^2 - x - 1 = (x-1)(4x^2+2x+1)$.
ב. לפי המשפט השורשים האפשריים הם ± 1 בדיקה ישירה מראה ששניהם לא מאפסים את הפולינום. לכן אין שורשים רציונליים לפולינום.

4. יהי הפולינום $p(x) = x^2 - 3x - 2$. כיצד הוא מתפרק מעל R, Z, Z4?
R: $\left(x - \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)\left(x - \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)$

Z: $x^2 - 3x - 2$

Z4: $(x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2 = x^2 - 3x - 2 =$

בהצלחה!