

**בחינה לדוגמא בקורס**  
**מבנים דיסקרטיים להנדסה (83217)**  
**מרצה: פרופ' רון עדין**

משך הבחינה: שעתיים וחצי (150 דקות).  
יש לענות על 5 מתוך 6 השאלות. כל השאלות שוות-משקל.  
אין להשתמש בחומר עזר (גם לא במחשבון).  
מותר להשתמש בכל משפט שנלמד בשעור או בתרגיל. נא להסביר באופן ברור את דרך הפתרון, ולכלול במחברת את כל החישובים הנחוצים. גם לטיוטות יש להשתמש במחברת הבחינה בלבד, בעמודים נפרדים שיסומנו "טיוטה".

**מהצחה!**

1. תהי  $G$  קבוצה עם פעולה בינרית  $\circ$  המוגדרת על-ידי:  
 $a \circ a = a, a \circ b = b, b \circ a = b, b \circ b = b$   
(א) רשמו את כל היחידות הימניות והשמאליות של  $G$ .  
(ב) האם  $G$  אגודה? מונואיד? חבורה? קומוטטיבית? נמקו.
2. הוכיחו: אם  $H$  תת-חבורה של חבורה סופית  $G$  המקיימת  $|H| = \frac{1}{2}|G|$ , אז  $H$  תת-חבורה נורמלית של  $G$ .
3. בכמה דרכים אפשר לצבוע קדקדי ריבוע בצבעים כחול, אדום ולבן, אם לא מבחינים בין צביעות הנבדלות זו מזו ע"י סיבוב או שיקוף של הריבוע? רשמו במפורש את חבורת הסימטריה הרלבנטית.
4. (א) בעזרת אלגוריתם אוקלידס מצאו, עבור  
 $a(x) = x^3 + 2x + 2, b(x) = x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$   
את  $\gcd(a(x), b(x))$ , והביעו אותו כצירוף לינארי של  $b(x), a(x)$  (עם מקדמים ב- $\mathbb{Z}_3[x]$ ).  
(ב) מצאו את ההפכי של האיבר  $\overline{x^2 + 1}$  בשדה  $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_3[x]/(x^3 + 2x + 2)$  (אין צורך להוכיח ש- $\mathbb{F}$  שדה).
5. תהי  $\Sigma = \{a, b\}$ . הוכיחו: אין אוטומט סופי המזהה את השפה  $L = \{a^n b^{3n} \mid n > 0\}$ .
6. תהי  $\Sigma = \{a, b\}$ .  
(א) מצאו אוטומט סופי דטרמיניסטי המזהה את השפה  
 $L = \{w \in \Sigma^* \mid \#_a(w) \equiv 0 \pmod{3}\}$   
(ב) מצאו אוטומט דטרמיניסטי השקול לאוטומט הלא-דטרמיניסטי הבא:

