

**בחינת סיום (מועד א') בקורס**  
**מבנים דיסקרטיים להנדסה (83217)**  
**מרצה: פרופ' רון עדין**

משך הבחינה: שעתיים וחצי (150 דקות).  
יש לענות על 5 מתוך 6 השאלות. כל השאלות שוות-משקל.  
אין להשתמש בחומר עזר (גם לא במחשבון).  
מותר להשתמש בכל משפט שנלמד בשעור או בתרגיל. נא להסביר באופן ברור את דרך הפתרון, ולכלול במחברת את כל החישובים הנחוצים. גם לטיוטות יש להשתמש במחברת הבחינה בלבד, בעמודים נפרדים שיסומנו "טיוטה".

*בהצלחה!*

1. תהי  $G = \mathbb{Z}$  (קבוצת המספרים השלמים) עם הפעולה " $\circ$ ":  
$$a \circ b := a \cdot b + a + b \quad (\forall a, b \in \mathbb{Z})$$
כאשר " $+$ " הוא חיבור רגיל, " $\cdot$ " כפל רגיל.  
א) רשמו את כל היחידות הימניות והשמאליות של  $(G, \circ)$ .  
ב) האם  $(G, \circ)$  אגודה? מונואיד? חבורה? קומוטטיבית? נמקו.
2. תהי  $G = S_4$ , ותהי  $H$  תת-החבורה הציקלית של  $G$  הנוצרת על-ידי התמורה  
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$
רשמו את כל המחלקות הימניות של  $H$  ב- $G$ .  
א) רשמו את כל המחלקות השמאליות של  $H$  ב- $G$ .  
ב) האם  $H$  נורמלית ב- $G$ ?
3. תהי  $S$  הקבוצה הבאה של מטריצות ממשיות:  
$$S := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$
האם, לגבי פעולות חיבור וכפל מטריצות,  $S$  היא: חוג? קומוטטיבי? עם יחידה? חוג חילוק? שדה? נמקו.
4. א) מצאו את המחלק המשותף המירבי (gcd) של  
$$a(x) = x^4 + x^2 + x + 1, \quad b(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$$
והביעו אותו כצירוף לינארי של  $b(x), a(x)$  (עם מקדמים ב- $\mathbb{Z}_2[x]$ ).  
ב) מצאו את ההפכי של  $\bar{7}$  בשדה  $\mathbb{Z}_{101}$ .
5. יהי  $\Sigma = \{a, b\}$ . הוכיחו: אין אוטומט סופי המזהה את השפה  $L = \{a^n b a^n \mid n > 0\}$ .
6. תהי  $\Sigma = \{a, b\}$ .  
א) מצאו אוטומט סופי (לא דטרמיניסטי) קטן ככל האפשר המזהה את השפה  $L = a \Sigma^* b a$ .  
ב) מצאו אוטומט סופי דטרמיניסטי המזהה אותה שפה. הסבירו את פתרונכם.