

אלגברה יישומית (88374) : תרגיל בית מס' 1

תאריך הגשה: כ"ט בניסן תש"ע (13 באפריל).

השאלות (5 במספר) הן כולן מתוך הספר:
Cormen & al., Introduction to Algorithms, 2nd Edition, 2001; Ch. 30.

למעוניינים, להלן תרגום לעברית של השאלות.

עמ' 829-830 :

1. (30.1-1) הכפל את הפולינומים $A(x) = 7x^3 - x^2 + x - 10$, $B(x) = 8x^3 - 6x + 3$ בעזרת משוואות (30.1), (30.2) (הגדרת כפל פולינומים).

2. (30.1-2) מציאת ערך פולינום $A(x)$ ממעלה קטנה מ- n בנקודה נתונה x_0 יכולה להיעשות גם ע"י חילוק $A(x)$ בפולינום $(x - x_0)$, לקבלת מנה $q(x)$ (ממעלה קטנה מ- $(n-1)$) ושארית r (מספר קבוע); בבירור $A(x_0) = r$. הראה כיצד לחשב את השארית r ואת מקדמי $q(x)$, בזמן $\Theta(n)$, מתוך x_0 ומקדמי $A(x)$.

3. (30.1-5) הראה כיצד להשתמש במשוואה (30.5) (פולינום האינטרפולציה של לגרנז') כדי לבצע אינטרפולציה בזמן $\Theta(n^2)$. (רמז: תחילה חשב הצגה בעזרת מקדמים עבור הפולינום $\prod_j (x - x_j)$, ואחר-כך חלק ב- $(x - x_k)$ כנדרש עבור המונה של כל מחובר; ראה תרגיל 30.1-2. כל מכנה ניתן לחשב בזמן $O(n)$.)

4. (30.1-7) תהינה A, B שתי קבוצות, כל אחת בת n מספרים שלמים בתחום 0 עד $10n$. ברצוננו לחשב את הסכום הקרטזי של A ו- B , המוגדר על-ידי: $C := \{x + y \mid x \in A, y \in B\}$. שים לב שהמספרים ב- C הם בתחום 0 עד $20n$. ברצוננו למצוא את אברי C ואת מספר הפעמים שכל איבר של C ממומש כסכום איברים ב- A וב- B . הראה שניתן לפתור את הבעיה בזמן $O(n \log n)$. (רמז: הצג את A ואת B כפולינומים ממעלה $\geq 10n$.)

עמ' 844 :

5. (30-2) מטריצת טפליץ (Toeplitz) היא מטריצה $A = (a_{ij})$ מסדר $n \times n$ המקיימת
 $a_{i,j} = a_{i-1,j-1}$ לכל $2 \leq i, j \leq n$.

(א) האם סכום של שתי מטריצות טפליץ הוא תמיד טפליץ? ומה לגבי מכפלה?
(ב) תאר כיצד לייצג מטריצת טפליץ כך שניתן לחבר שתי מטריצות טפליץ מסדר $n \times n$ בזמן $O(n)$.

(ג) רשום אלגוריתם בעל זמן $O(n \log n)$ להכפלת מטריצת טפליץ מסדר $n \times n$ בוקטור באורך n . השתמש בהצגה מסעיף (ב).

(ד) רשום אלגוריתם יעיל להכפלת שתי מטריצות טפליץ מסדר $n \times n$. נתח את זמן הריצה שלו.