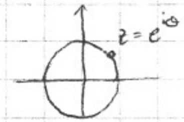

נגדיר $f_1:\mathbb{T}\to\mathbb{C}$ ע"י
$f_1(e^{i\theta}) := f(\theta)$ $(\forall\theta\in\mathbb{R})$

מכיוון ש- $f(\theta+2\pi)=f(\theta)$ לכל $\theta\in\mathbb{R}$,
הפונקציה f_1 מוגדרת היטב על $\mathbb{T}$.

פיתוח פורייה $f_1(e^{ix}) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$

מביע את f_1 באמצעות פונקציות מיוחדות:

$x \longmapsto e^{inx}$ $(n\in\mathbb{Z})$

הן פונקציות בעלות מחזור 2π, שניתנות
לביטוי על מעגל היחידה ($z=e^{inx}$) ע"י

$z\longmapsto z^n$ $(n\in\mathbb{Z})$

מה הייחוד של פונקציות אלו?

$(\mathbb{T},\cdot)$ היא חבורה קומוטטיבית (קומפקטית)
לגבי כפל מספרים מרוכבים:

$e^{i\theta_1}\cdot e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

והפונקציות $z\to z^n$ הן כרקטרים (לינאריים) של $\mathbb{T}$,
כלומר: פונקציות (רציפות) $\varphi:\mathbb{T}\to\mathbb{C}^*$
$\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\setminus\{0\}$

המקיימות

$\varphi(z_1\cdot z_2)=\varphi(z_1)\cdot\varphi(z_2)$ $(\forall z_1,z_2\in\mathbb{T})$

באופן כללי, כרקטר של חבורה $(G,\circ)$
היא פונקציה $\varphi: G\to\mathbb{C}^*$ המקיימת

$\varphi(g_1\circ g_2) = \varphi(g_1)\cdot\varphi(g_2)$ $(\forall g_1,g_2\in G)$

הפעולה ב-G כפל מרוכבים

(דוגמא:
הכרקטר הטריוויאלי $\varphi(g)=1$, $(\forall g\in G)$)

אפשר להראות ש $z\to z^n$ $(n\in\mathbb{Z})$ הם כל
הכרקטרים הלינאריים הרציפים של $\mathbb{T}$.

עבור DFT:
החבורה $G=\{\omega^k \mid 0\le k\le n-1\}$, לגבי
כפל מספרים מרוכבים; היא חבורה
צקלית (איזומורפית ל-$(\mathbb{Z}_n,+)$)

סדרה $(y_0,\dots,y_{n-1})$ של מספרים מרוכבים
אפשר לראות כפונקציה $y: G\to\mathbb{C}$
$\omega^k\mapsto y_k$

DFT מביע את הפונקציה y (כצירוף)
לינארי של כרקטרים של G.

$\varphi(g_1\circ g_2)=\varphi(g_1)\cdot\varphi(g_2)$ $(\forall g_1,g_2\in G)$

$\Rightarrow \varphi(e)=1$

איבר היחידה

אבל

$\omega^n=1 \Rightarrow \varphi(\omega)^n=\varphi(\omega^n)=\varphi(1)=1$

$\Rightarrow$ $\varphi(\omega)$ שורש יחידה מסדר n.

$\Rightarrow (\exists k)\ \varphi(\omega)=\omega^k$

$\varphi(\omega^j)=\omega^{jk}$ $(\forall j)$

לכן יש בדיוק $\underline{n}$ כרקטרים ל-G:

$\varphi_k(\omega^j)=\omega^{jk}$

$\begin{pmatrix}0\le k\le n-1\\ 0\le j\le n-1\end{pmatrix}$

$y_k=\sum_{j=0}^{n-1} a_j\omega^{jk}$ (DFT)

(הפונקציה y מובעת כסכום משוקלל של כרקטרים של G)