

## מבוא לקומבינטוריקה (88554) \ ד"ר רון עדין בחינת סיום (מועד א')

משך הבחינה: שעתיים וחצי (150 דקות).  
מותר להשתמש בכל חומר עזר.  
יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות. כל השאלות שוות-משקל.  
נא להסביר באופן ברור את דרך הפתרון, ולכלול במחברת את כל החישובים הנחוצים.

*מהצחה!*

1. (א) מצא את מספר הסדרות  $(a_1, \dots, a_{100})$  של מספרים שלמים זוגיים המקיימים  $0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_{100} \leq 200$ .  
(ב) מצא את מספר הסדרות  $(a_1, \dots, a_{100})$  של מספרים שלמים אי-זוגיים המקיימים  $0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_{100} \leq 200$ .
2. (א) עבור איזה ערך של הפרמטר  $c$  יש לנוסחת הנסיגה הבאה פתרון  $a_n$  שהוא פולינום ב- $n$  (שאינו קבוע)?  
$$a_n + ca_{n-1} + a_{n-2} = 0 \quad (n \geq 2)$$
  
(ב) מצא פתרון כזה המקיים את תנאי ההתחלה  $a_0 = 1, a_1 = 3$ .
3. (א) האם המקדם הבינומי  $\binom{200}{100}$  מתחלק ב-7? נמק.  
(ב) באיזו חזקה של 10 מתחלק המקדם הבינומי  $\binom{200}{100}$ ? הסבר את חישוביך.
4. הוכח (בכל דרך שתרצה):  
$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{n} \cdot \frac{1}{2^n} = 2^k \quad (k \geq 1)$$
5. מטילים קוביה  $n$  פעמים בזו אחר זו. מה ההסתברות שהתקבלו בסך הכל בדיוק שלושה ערכים שונים (מתוך ששת הערכים האפשריים)?