

מבוא לקומבינטוריקה (88554) \ ד"ר רון עדין בחינת סיום (מועד ב')

משך הבחינה: שעתיים וחצי (150 דקות).
מותר להשתמש בכל חומר עזר.
יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות. כל השאלות שוות-משקל.
נא להסביר באופן ברור את דרך הפתרון, ולכלול במחברת את כל החישובים הנחוצים.

בהצלחה!

.1

א) מצא את מספר הפתרונות של המשוואה

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 120$$

כאשר x_i שלם חיובי לכל i .

ב) מצא את מספר הפתרונות של המשוואה הנ"ל כאשר $0 \leq x_i \leq 100$ (שלם) לכל i .

.2

א) עבור איזה ערך של הפרמטר c יש לשתי נוסחאות הנסיגה הבאות פתרון משותף? נמק את תשובתך.

$$a_n - 2a_{n-1} = 7 \quad (n \geq 1)$$

$$a_n + ca_{n-1} = 3 \cdot 2^n \quad (n \geq 1)$$

ב) מצא את הפתרון המשותף הנ"ל, ובפרט מצא את a_1, a_0 . בדוק את תשובתך!

3. נסח והוכח תנאי קל לבדיקה לכך שהמקדם המולטינומי $\begin{pmatrix} a+b+c \\ a & b & c \end{pmatrix}$ יתחלק במספר ראשוני נתון p .

4. נתון כי $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n \in \mathbf{R}[[x]]$ הוא טור חזקות פורמלי המקיים:

$$f(x)^2 + 2(1-x)f(x) + x^2 = 0$$

א) מצא נוסחה מפורשת עבור $f(x)$, אם נתון כי $f_0 = 0$.

ב) מצא נוסחה מפורשת עבור f_n ($n \geq 1$).

5. מגרילים מספר שלם $1 \leq n \leq 10^{100}$. מה ההסתברות שהמספר $n-1$ (בהצגתו העשרונית, כולל אפסים מובילים) מכיל את כל עשר הספרות?