

## מבוא לקומבינטוריקה (88554) \ פרופ' רון עדין בחינת סיום (מועד א')

משך הבחינה: שעתיים וחצי (150 דקות).  
אין להשתמש בחומר עזר (גם לא במחשבון), פרט לדף-סיכום דו-צדדי בגודל A4.  
יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות. כל השאלות שוות-משקל.  
נא להסביר באופן ברור את דרך הפתרון, ולכלול במחברת את כל החישובים הנחוצים.

*מהצחה!*

1.

א) פתור את נוסחת הנסיגה

$$a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 3^n \quad (n \geq 2)$$

עם תנאי ההתחלה

$$a_0 = a_1 = 1$$

ב) רשום נוסחת נסיגה לינארית הומוגנית עם מקדמים קבועים (לאו דווקא מסדר 2), עם תנאי התחלה, שפתרונה זהה לפתרון מסעיף א'.

2. דוור מחלק "הודעות לבוחר" (אישיות) לשמונת הדיירים בבנין. כל דייר מקבל הודעה אחת, אבל בצורה אקראית. מה ההסתברות שבדיוק מחצית מהדיירים קבלו את ההודעות המיועדות להם?

3. מצא את מקדם  $x^6$  בפיתוח הפולינום  $(1+x+x^2)^{100}$ . הסבר את חישוביך!

4. מצא כמה מספרים עשרוניים, בעלי  $n$  ספרות בדיוק (ללא אפסים מובילים), הם בעלי סכום ספרות 7 לכל היותר.

5.

א) הוכח: המקדם הבינומי  $\binom{2n}{n}$  הוא זוגי לכל  $n \geq 1$ .

ב) הוכח: מספר קטלאן  $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$  הוא זוגי אם ורק אם  $n+1$  איננו חזקה

של 2. (רמז: רשום את  $C_n$  בצורה אחרת).