מבוא לקומבינטוריקה (88554) \ ד"ר רון עדין
תשובות לשאלות בחינה תשס"ג (מועדים א', ב')

מועד א'

.1

א) $a_n = -(5n+8)\cdot 2^n + 9\cdot 3^n$.

ב) שרשי הפולינום האופייני הם 2 (כפול) ו-3, ולכן נוסחת הנסיגה היא $a_n - 7a_{n-1} + 16a_{n-2} - 12a_{n-3} = 0 \quad (n \ge 2)$.

2. שימוש בנוסחת ההכללה וההוצאה מן הכלל נותן:
$$p = \frac{e_4}{|U|} = \frac{1}{8!}\sum_{i=4}^{8}(-1)^{i-4}\binom{i}{4}\binom{8}{i}(8-i)! = \frac{1}{4!}\sum_{i=4}^{8}\frac{(-1)^{i-4}}{(i-4)!}\ .$$

3. $(1-x)^{-100}\left(1-x^3\right)^{100} = \left(1+x+x^2\right)^{100}$, והמקדם הוא: $\binom{100}{2} + \binom{102}{3} 100 - \binom{105}{6}$.

4. הספרה הראשונה איננה אפס. מחפשים את סכום מקדמי $x^7,\ldots,x,1$ בביטוי $\left(x+\ldots+x^9\right)\left(1+x+\ldots+x^9\right)^{n-1}$, שהוא מקדם x^7 בביטוי הנ"ל כפול $1+x+x^2+\ldots$. חזקות מעל x^9 אינן משפיעות על מקדם x^7, ולכן מספיק להתבונן בטור $\left(x+x^2+\ldots\right)\left(1+x+\ldots\right)^n\left(\ldots\right) = x(1-x)^{-(n+1)}$. __תשובה:__ $\binom{n+6}{6}$.

.5

א) לפי משפט לוקאס, יש לרשום את פעולת החיבור $n+n=2n$ לפי בסיס 2 ולבדוק אם יש עמודה עם נשא. בהצגה הבינרית של $n \ge 1$ יש פעם אחת לפחות 1, ובאותה עמודה יש נשא בחיבור הנ"ל.

ב) מהנוסחה $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ נובע, לפי סעיף א', ש-C_n זוגי לכל n זוגי (ואין מידע עבור n אי-זוגי); אולם אם נכתוב $C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$ נקבל, לפי סעיף א', ש-C_n זוגי (עבור $n \ge 1$) אם ורק אם $\binom{2n}{n-1}$ זוגי. בפעולת החיבור $(n-1)+(n+1)=2n$ יש נשא בעמודה של ה"ביט" המשמעותי ביותר (msb) ב-$n-1$, אלא אם ב-$n+1$ יש שם אפס; וזה קורה רק אם n או $n+1$ הוא חזקה של 2. בדיקה יותר מדוקדקת מעלה שאין נשא בכלל אם ורק אם $n+1$ הוא חזקה של 2.

מועד ב'

.1

א) $a_n = (-1)^n (n^2 - 5n + 2)$.

ב) הפתרון הכללי הוא מהצורה $a_n = (-1)^n (\alpha n^2 + \beta n + \gamma)$.

.2 יש 16 שורות, עמודות ואלכסונים, ורק 15 ערכים אפשריים לסכום $(-7,\ldots 7)$.

.3 $(n \ge 0) \quad a_n = (-3)^n (1 + \frac{2}{3} n)$.

.4

א) פונקציה כזאת מגדירה חלוקה של $[n]$ ל- k בלוקים זרים ולא ריקים, אבל <u>עם</u> חשיבות לסדר הבלוקים: $f^{-1}(1), \ldots, f^{-1}(k)$.

ב) אגף שמאל הוא מספר כל הפונקציות $f : [n] \to [m]$. אגף ימין סופר אותן לפי גודל התמונה $1 \le k \le m$: $\binom{m}{k} \cdot k! S(n,k) = (m)_k S(n,k)$.

.5

א) $\frac{1}{100^{10}} \binom{109}{10}$.

ב) $\frac{1}{100^{10}} \left[100 \binom{108}{9} - \binom{109}{10} \right]$.