

מבוא לקומבינטוריקה (88554) \ פרופ' רון עדין בחינת סיום (מועד ב')

משך הבחינה: שעתיים וחצי (150 דקות).
אין להשתמש בחומר עזר (גם לא במחשבון), פרט לדף-סיכום דו-צדדי בגודל A4.
יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות. כל השאלות שוות-משקל.
נא להסביר באופן ברור את דרך הפתרון, ולכלול במחברת את כל החישובים הנחוצים.

מהצחה!

1.

א) פתור את נוסחת הנסיגה

$$a_n + 2a_{n-1} + a_{n-2} = 2 \cdot (-1)^n \quad (n \geq 2)$$

עם תנאי ההתחלה

$$a_0 = a_1 = 2$$

ב) הוכח שפתרון (a_n) של נוסחת הנסיגה הנ"ל, עם תנאי התחלה כלשהם, מקיים: $|a_n| = O(n^2)$.

2. בכל משבצת בריבוע בגודל 7×7 נרשם אחד המספרים: $0, 1, -1$. מחשבים עבור כל שורה, עמודה או אלכסון של הריבוע (הכוונה לשני האלכסונים הגדולים) את סכום המספרים בו. הוכח: לא כל הסכומים הללו שונים זה מזה.

3. מצא נוסחה מפורשת עבור המקדם c_n בטור החזקות הפורמלי

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \frac{1+x}{1+6x+9x^2}$$

4.

א) הוכח: מספר הפונקציות $f: [n] \rightarrow [k]$ שהן על הוא $k!S(n, k)$, כאשר $S(n, k)$ הוא מספר סטירלינג מסוג שני.

ב) הוכח שלכל m, n טבעיים:

$$m^n = \sum_{k=1}^m S(n, k)(m)_k$$

כאשר $(m)_k = m(m-1)\cdots(m-k+1)$.

5.

א) מה ההסתברות שסדרה a_1, \dots, a_{10} של עשרה מספרים שלמים בתחום

$1 \leq a_i \leq 100$ תהיה מונוטונית לא יורדת: $a_1 \leq \dots \leq a_{10}$?

ב) מה ההסתברות שסדרה כנ"ל תקיים: $a_1 \leq \dots \leq a_9 > a_{10}$?