

מבוא לקומבינטוריקה (88554) \ פרופ' רון עדין בחינת סיום (מועד א')

משך הבחינה: שעתיים וחצי (150 דקות).
אין להשתמש בחומר עזר (גם לא במחשבון), פרט לדף-סיכום דו-צדדי בגודל A4.
יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות. כל השאלות שוות-משקל.
נא להסביר באופן ברור את דרך הפתרון, ולכלול במחברת את כל החישובים הנחוצים.

מהצחה!

1. מה ההסתברות שבבחירת 5 קלפים (שונים) מחפיסה של 52 קלפים, כל אחד מארבעת הסוגים יופיע לפחות פעם אחת?

2.

א) בוחרים 7 נקודות בעיגול ברדיוס 1. הוכח שיש ביניהן שתי נקודות שהמרחק ביניהן אינו עולה על 1.
ב) הוכח אותה מסקנה עבור 6 נקודות.

3.

א) הוכח (עדיף בדרך קומבינטורית):

$$S(n, k) \leq \frac{k^n}{k!} \quad (1 \leq k \leq n)$$

כאשר $S(n, k)$ הוא מספר סטירלינג מסוג שני.

ב) הוכח, בכל דרך שתרצה, את הנוסחה הבאה:

$$k! S(n, k) = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n \quad (1 \leq k \leq n)$$

4.

א) פתור את נוסחת הנסיגה

$$a_n - 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 0 \quad (n \geq 2)$$

עם תנאי ההתחלה $a_0 = a_1 = 1$.

ב) פתור את נוסחת הנסיגה

$$a_n - 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 4n \quad (n \geq 2)$$

עם תנאי ההתחלה $a_0 = a_1 = 1$.

5. בכמה מספרים עשרוניים בני 20 ספרות, כולן שונות מאפס, סכום הספרות הוא 30?