מבוא לקומבינטוריקה (88554) \ פרופ' רון עדין
תשובות לשאלות בחינות תשס"ד (מועדים א', ב')

מועד א'

1. אפשר להניח שאין חשיבות לסדר (צירופים בלי חזרות).

דרך א:
נוסחת ההכללה וההוצאה מן הכלל.

$U := \{\text{combinations of 5 out of 52 cards}\}$

$A_j := \{x \in U \mid \text{type } j \text{ does not appear in } x\} \qquad (1 \le j \le 4)$

$.\, s_i = \binom{4}{i}\binom{13\cdot(4-i)}{5} \qquad (0 \le i \le 4)$

$$e_0 = \sum_{i=0}^{4}(-1)^i s_i = \binom{4}{0}\binom{52}{5} - \binom{4}{1}\binom{39}{5} + \binom{4}{2}\binom{26}{5} - \binom{4}{3}\binom{13}{5}$$

$$p = \frac{e_0}{|U|} = \frac{e_0}{\binom{52}{5}}$$

דרך ב:
אם כל סוג מופיע לפחות פעם אחת אז חלוקת הקלפים בין הסוגים היא בהכרח $5 = 2+1+1+1$. צריך לבחור את הסוג ממנו יש שני קלפים, והתוצאה:

$$p = \frac{4\cdot\binom{13}{2}\cdot 13^3}{\binom{52}{5}}$$

2.

א) נחלק את העיגול ל- 6 גזרות, כל אחת בזווית מרכזית 60°. לפי עקרון שובך היונים יש לפחות גזרה אחת עם שתי נקודות (או יותר). נותר להראות שהמרחק בין שתי נקודות באותה גזרה אינו עולה על 1.
נקח שתי נקודות באותה גזרה, במרחק מקסימלי זו מזו. אם שתיהן בתוך המשולש שווה הצלעות שקדקודיו הם מרכז המעגל ושני קצות הקשת, אז בוודאי המרחק המירבי הוא זה שבין קדקודי המשולש (ז"א 1). אם שתיהן מחוץ למשולש אז המרחק המירבי הוא זה שבין שני קצות הקשת (שוב 1). אם אחת בתוך המשולש ואחת מחוצה לו אז המרחק המירבי הוא זה שבין מרכז המעגל לנקודה על היקפו (שוב 1).

ב) נבחר את 6 הגזרות כך שאחת הנקודות (נקרא לה P) תהיה על רדיוס המפריד בין שתי גזרות. אם המרחק בין כל שתי נקודות עולה על 1 אז אין נקודות באף אחת משתי הגזרות הגובלות ב- P. מלבד P יש 5 נקודות ב- 4 גזרות, ושוב ניתן להפעיל את עקרון שובך היונים.

3.

א) המספר הכללי של פונקציות $f:[n]\to[k]$ הוא k^n. מספר הפונקציות הנ"ל שהן <u>על</u> הוא $S(n,k)\cdot k!$.

ב) בעזרת נוסחת ההכללה וההוצאה מן הכלל:

$$U:=\{f \mid f:[n]\to[k] \text{ function}\}$$

$$A_j:=\{f\in U \mid j\notin \mathrm{im}(f)\} \quad (1\le j\le k)$$

$$E_0=U\setminus\bigcup_{j=1}^{k}A_j=\{f\in U \mid f \text{ onto}\}$$

$$S(n,k)=e_0=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i s_i=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n$$

4.

א) $a_n=(1-\frac{2}{3}n)\cdot 3^n$

ב) $a_n=(n+3)+(n-2)\cdot 3^n$

5. מחפשים את מקדם x^{30} בפולינום $\left(x+x^2+\ldots+x^9\right)^{20}$, שהוא מקדם x^{10} בפולינום

$$\left(1+x+\ldots+x^8\right)^{20}=\left(\frac{1-x^9}{1-x}\right)^{20}=\left(1-x^9\right)^{20}(1-x)^{-20}$$

האפשרויות לקבלת x^{10} הן: $x^0\cdot x^{10}$, $x^9\cdot x^1$. המקדם הוא, לכן,

$$\binom{20}{0}(-1)^0\cdot\binom{-20}{10}(-1)^{10}+\binom{20}{1}(-1)^1\cdot\binom{-20}{1}(-1)^1=\binom{29}{10}-400$$

בדרך אחרת: אם אין הגבלה על גודל הספרות אז יש $\binom{20+10-1}{10}$ אפשרויות.

תיתכן לכל היותר "ספרה" אחת גדולה או שווה ל-10 (בגלל סכום הספרות), ויש 20 אפשרויות למיקומה. אחרי הפחתת 10 לספרה זו ו-1 לכל אחת מהאחרות, נשאר לחלק סכום ספרות 1 בין 20 ספרות, ב-20 דרכים: $20\cdot 20$ $-\binom{29}{10}$.

מועד ב'

.1

א) $F_0 = 1, \quad F_1 = 1, \quad F_2 = 2, \quad F_3 = 3, \quad F_4 = 5$

ב) על-פי נוסחת הנסיגה של מקדמים בינומיים:

$$F_n = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-i}{i} = 1 + \sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-i}{i} = 1 + \sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-i-1}{i} + \sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-i-1}{i-1} =$$

$$= \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-i-1}{i} + \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor - 1} \binom{n-j-2}{j} = F_{n-1} + F_{n-2} \qquad (n \ge 2)$$

.2

א) $a_n = \beta_1 \cdot 3^n + \beta_2 \cdot (1/2)^n - 2 \qquad (n \ge 0)$

ב) $a_n = 3 \cdot 2^{-n} - 2 \qquad (n \ge 0)$

.3

א) $p = \frac{e_k}{n!} = \frac{1}{n!} \sum_{i=k}^{n} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} \binom{n}{i} (n-i)! = \frac{1}{k!} \sum_{i=k}^{n} (-1)^{i-k} \frac{1}{(i-k)!}$

ב) $\lim_{n \to \infty} p = \frac{1}{k!} \sum_{i=k}^{\infty} (-1)^{i-k} \frac{1}{(i-k)!} = \frac{e^{-1}}{k!}$

.4

א) $\frac{24!}{(4!)^6}$

ב) מקדם x^{30} בפונקציה היוצרת

$$(x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^{24} = \left(\frac{x - x^7}{1-x} \right)^{24} = x^{24} (1-x^6)^{24} (1-x)^{-24} =$$

$$= x^{24} \cdot \sum_{k=0}^{24} \binom{24}{k} (-x^6)^k \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \binom{-24}{l} (-x)^l$$

הוא

$$\binom{24}{0} (-1)^0 \binom{-24}{6} (-1)^6 + \binom{24}{1} (-1)^1 \binom{-24}{0} (-1)^0 = \binom{29}{6} - 24$$

.5 $\frac{1}{7} \binom{70}{30}$