

## מבוא לקומבינטוריקה (88554) \ פרופ' רון עדין בחינת סיום (מועד א')

משך הבחינה: שעתיים וחצי (150 דקות).  
אין להשתמש בחומר עזר (גם לא במחשבון), פרט לדף-סיכום דו-צדדי בגודל A4.  
יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות. כל השאלות שוות-משקל.  
נא להסביר באופן ברור את דרך הפתרון, ולכלול במחברת את כל החישובים הנחוצים.

*מהצחה!*

1. כמה מספרים שלמים בין 1 ל-4200 זרים למספר 70?
2. כמה סדרות באורך  $n$  המורכבות מהספרות 0,1,2 מכילות מספר זוגי של אפסים ומספר אי-זוגי של אחדים?
3. (א) הוכח (בכל דרך שתבחר):

$$(1-x)^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$

(ב) נתון כי

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^n (k+1)a_{n-k} \quad (n \geq 0)$$

כאשר  $a_0 = 1$ . מצא נוסחה מפורשת עבור  $a_n$ .

(ג) הראה כי הסדרה מסעיף ב' מקיימת

$$a_n = F_{2n-1} \quad (n \geq 1)$$

כאשר  $F_n$  הוא מספר פיבונצ'י ה- $n$ .

4. (א) באיזו חזקה של 10 מתחלק המספר  $100!$  ?  
(ב) באיזו חזקה של 10 מתחלק המקדם הבינומי  $\binom{100}{50}$ ? הסבר את תשובתך.

5. (א) פתור את נוסחת-החזרה

$$a_n - 3a_{n-1} - 4a_{n-2} + 12a_{n-3} = 0 \quad (n \geq 3)$$

עם תנאי ההתחלה

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 5$$

(ב) רשום נוסחת-חזרה לינארית הומוגנית מסדר 2 (עם מקדמים קבועים) בעלת אותו פתרון כמו בסעיף א'.