

מבוא לקומבינטוריקה (88554) \ פרופ' רון עדין
תשובות לשאלות בחינות תשס"ו (מועדים א', ב')

מועד א'

$$1. \binom{100}{0} \binom{129}{99} - \binom{100}{1} \binom{116}{99} + \binom{100}{2} \binom{103}{99}$$

2. מספר ההילוכים $(0,0) \rightarrow (3,6)$ בעלי שטח 9 הוא מקדם q^9 במקדם ה- q -בינומי

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 3+6 \\ 3 \end{bmatrix}_q &= \frac{[9]_q [8]_q [7]_q}{[3]_q [2]_q [1]_q} = \frac{(1-q^9)(1-q^8)(1-q^7)}{(1-q^3)(1-q^2)(1-q^1)} = \\ &= (1+q^3+q^6)(1+q^2+q^4+q^6)(1+q+q^2+q^3+q^4+q^5+q^6) \end{aligned}$$

ומקדם זה הוא $2+4+2=8$.

$$3. \begin{pmatrix} 60 \\ 50 \end{pmatrix}$$

4. אי-זוגי, כי אין נשא בחיבור $.55 = 33 + 18 + 4 = 100001_2 + 10010_2 + 100_2 = 110111_2$

5. פתרון הנוסחה: $a_n = 2^n + (5-5n) \quad (n \geq 0)$

לכן: $b_n = a_{2n} = 4^n + (5-10n) \quad (n \geq 0)$

פולינום אופייני: $(x-4)(x-1)^2 = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$

נוסחת-חזרה לינארית הומוגנית: $b_n - 6b_{n-1} + 9b_{n-2} - 4b_{n-3} = 0 \quad (n \geq 3)$

עם תנאי התחלה $(b_0, b_1, b_2) = (a_0, a_2, a_4) = (6, -1, 1)$

מועד ב'

1. מקדם x^{80} בפונקציה היוצרת $(x^1 + x^2 + \dots + x^6)^{60}$ הוא

$$\binom{60}{0} \binom{79}{59} - \binom{60}{1} \binom{73}{59} + \binom{60}{2} \binom{67}{59} - \binom{60}{3} \binom{61}{59}$$

2.
$$\binom{9}{3} - 2 \binom{8}{2} = \binom{8}{3} - \binom{8}{2} = \frac{3}{9} \binom{9}{3} = 28$$

3.
$$\binom{95}{20}$$

4.
$$\sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} 2k = \sum_{k=1}^n \binom{2n-1}{2k-1} 2n = 2n \cdot \frac{1}{2} \cdot 2^{2n-1} = n \cdot 2^{2n-1} \quad (n \geq 1)$$

5. פולינום אופייני: $x^3 - 3x^2 + 2x - 2 = (x-2)(x^2 - x + 1)$ ושרשיו: $2, \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

הפתרון הכללי: $a_n = \alpha \cdot 2^n + \beta \cdot \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n + \gamma \cdot \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n \quad (n \geq 0)$ שני

השורשים המרוכבים הם בעלי ערך מוחלט 1, ולכן: $\alpha = 0 \Leftrightarrow a_n = O(1)$ בצירוף

תנאי ההתחלה נקבל: $a_n = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n = 2 \cos \frac{n\pi}{3} \quad (n \geq 0)$