מבוא לקומבינטוריקה (88554) \ פרופ' רון עדין
תשובות לשאלות בחינות תשס"ז (מועדים א', ב')

מועד א'

1. הוכחת משפט (בעזרת שיקוף בישר $y=x$).

2.

$$\frac{25}{(1-2x)^2(1-3x)}=\frac{225}{1-3x}-\frac{150}{1-2x}-\frac{50}{(1-2x)^2}=\frac{225}{1-3x}+\frac{-200+300x}{(1-2x)^2}$$
$$a_n=225\cdot 3^n-(150+50(n+1))\cdot 2^n$$
$$a_{50}=225\cdot 3^{50}-2700\cdot 2^{50}=25\cdot(3^{52}-27\cdot 2^{52})$$

3. הפתרון הוא מהצורה $a_n=\beta_1\cdot 2^n+\beta_2\cdot 3^n+\frac{3}{10}\cdot(-3)^n$. לכן הפולינום האופייני עבור נוסחת החזרה ההומוגנית המבוקשת הוא

$$(\alpha-2)(\alpha-3)(\alpha+3)=\alpha^3-2\alpha^2-9\alpha+18$$

והנוסחה היא

$$a_n-2a_{n-1}-9a_{n-2}+18a_{n-3}=0 \qquad (n\geq 3)$$

4. חבורת הסימטריה היא ציקלית (C_6). תשובה: $\frac{1}{6}(c^6+c^3+2c^2+2c)$.

5. המספר המבוקש הוא מקדם x^{50} בפונקציה היוצרת

$$(x^1+x^3+x^5+x^7+x^9)^{30}=x^{30}(1+x^2+x^4+x^6+x^8)^{30}=$$
$$=x^{30}(1-x^{10})^{30}(1-x^2)^{-30}=x^{30}\cdot\sum_{k=0}^{30}\binom{30}{k}(-x^{10})^k\cdot\sum_{l=0}^{\infty}\binom{-30}{l}(-x^2)^l$$

האפשרויות הן:

$$k=0, l=10:\quad \binom{30}{0}(-1)^0\binom{30}{10}(-1)^{10}$$
$$k=1, l=5:\quad \binom{30}{1}(-1)^1\binom{30}{5}(-1)^5$$
$$k=2, l=0:\quad \binom{30}{2}(-1)^2\binom{30}{0}(-1)^0$$

ובסה"כ:

$$\binom{39}{10}-30\binom{34}{5}+\binom{30}{2}$$

6. נתבונן בפיתוח

$$\tfrac{1}{2}[(1+x)^n+(1-x)^n]=\binom{n}{0}+\binom{n}{2}x^2+\binom{n}{4}x^4+\binom{n}{6}x^6+\dots$$

נגזור לפי x :

$$\tfrac{1}{2}[n(1+x)^{n-1}-n(1-x)^{n-1}]=\binom{n}{0}+\binom{n}{2}\cdot 2x^1+\binom{n}{4}\cdot 4x^3+\binom{n}{6}\cdot 6x^5+\dots$$

והתשובה היא:

$$\tfrac{1}{2}[n(1+x)^{n-1}-n(1-x)^{n-1}] \qquad (n\ge 1)$$

<u>מועד ב'</u>

1. $a_0\neq 0$.

2. בעית הקלפי עם $(a,b)=(80,20)$: $\frac{3}{5}\binom{100}{20}$.

3. פתרון הנוסחה הראשונה: $a_n=(c_1+c_2n)\cdot 1^n+12\cdot 2^n \qquad (n\ge 0)$
פתרון הנוסחה השניה: $a_n=(c_3+c_4n)\cdot 2^n \qquad (n\ge 0)$
פתרון משותף חייב לקיים $c_1=c_2=c_4=0,\quad c_3=12$
ולכן $a_n=12\cdot 2^n \qquad (n\ge 0)$

4. חבורת הסימטריה היא D_5 , המכילה 5 סיבובים ו-5 שיקופים. מספר המסלולים של צביעות קדקודים הוא $k=\frac{1}{10}(c^5+5c^3+4c^1)$.

5. משולש שכל צלעותיו באורך 3 מורכב מ-9 משולשים שכל צלעותיהם באורך 1. לפי עקרון שובך היונים, יש לפחות שתים מתוך 10 הנקודות הנמצאות באותו משולש קטן, ולכן המרחק ביניהן הוא 1 לכל היותר.

6.
א) $\binom{28}{8}$
ב) $\binom{14}{4}\cdot\binom{13}{3}$