

מבוא לקומבינטוריקה (88554) \ פרופ' רון עדין בחינת סיום (מועד א')

משך הבחינה: שעתיים וחצי (150 דקות).
מותר להשתמש בדף הנוסחאות המצורף. אין להשתמש בכל חומר עזר אחר, פרט למחשבון.
יש לענות על 5 מתוך 6 השאלות. כל השאלות שוות-משקל.
נא להסביר ולנמק בבירור את הפתרון, ולכלול במחברת את כל החישובים הנחוצים.

בהצלחה!

1. הוכח את נוסחת הרקורסיה
$$S(n, k) = S(n-1, k-1) + k \cdot S(n-1, k) \quad (n, k \geq 1)$$
עבור מספרי סטירלינג מסוג שני.
2. סיסמת מחשב חוקית היא סדרה של n תווים הנבחרים (עם חזרות) מתוך:
26 התווים $a-z$;
10 התווים $0-9$;
4 התווים המיוחדים $"," "_ "$.
א) מה מספר הסיסמאות המכילות לפחות תו מיוחד אחד?
ב) מה מספר הסיסמאות המכילות מספר אי-זוגי של תווים מיוחדים? רשום תשובה המכילה מספר חסום (לא תלוי ב- n) של מחוברים. בדוק תשובתך עבור $n = 1, 2$.
3. א) נתון שמספר קטלאן $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ הוא מספר הילוכי השריג $(n, n) \rightarrow (0, 0)$ הנמצאים מתחת לישר $y = x$ או נוגעים בו. הסק שזהו גם מספר הילוכי השריג (מאין ולאין?) הנמצאים ממש מתחת לישר הנ"ל.
ב) הוכח, בעזרת סעיף א' או בדרך אחרת, שמספרי קטלאן מקיימים את נוסחת הרקורסיה
$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^n C_k C_{n-k} \quad (n \geq 0)$$
עם תנאי ההתחלה $C_0 = 1$.
4. נניח שמסירים שתי משבצות מלוח משובץ בגודל $m \times n$, כאשר $m, n \geq 2$ ו- mn זוגי. הוכח:
א) אם שתי המשבצות הן באותו צבע אז ללוח הנותר אין כיסוי מלא על-ידי אבני דומינו.
ב) אם שתי המשבצות אינן באותו צבע אז ללוח הנותר יש כיסוי מלא.
5. בכמה דרכים ניתן לצבוע קודקודי מחומש משוכלל ב- c צבעים? מותר להשתמש באותו צבע יותר מפעם אחת; צביעות המתקבלות זו מזו על-ידי סיבוב או שיקוף של המחומש נחשבות זהות.
6. הוכח:
$$\binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \binom{n}{12} + \dots = \frac{1}{4} \cdot 2^n + O(2^{n/2})$$