מבוא לקומבינטוריקה (88554) \ פרופ' רון עדין
תשובות לשאלות בחינות תשס"ט (מועדים א', ב')

מועד א'

1. בחלוקת הקבוצה $[n]$ ל- k בלוקים לא ריקים, ישנן שתי אפשרויות לגבי המספר n: או שהוא בבלוק לבדו, ואז יש $S(n-1,k-1)$ דרכים לחלק את יתר המספרים; או שהוא בבלוק עם אחרים, ואז השמטתו נותנת $S(n-1,k)$ דרכים לחלק את השאר, ומכל אחת מהן יש k דרכים לשחזר את מיקום המספר n.

2.

א) 40^n-36^n.

ב) דרך א': הפונקציה היוצרת המעריכית היא

$$e^{36x}\cdot\left(\frac{e^{4x}-e^{-4x}}{2}\right)=\frac{e^{40x}-e^{32x}}{2}$$

ולכן המספר הוא $\frac{40^n-32^n}{2}$.

דרך ב': אפשר לבחור תחילה את המספר k של תווים מיוחדים, אחר-כך את המיקום שלהם בסיסמה ($\binom{n}{k}$ אפשרויות), ולבסוף את זהות כל התווים. מקבלים:

$$\sum_{k\text{ odd}}\binom{n}{k}36^{n-k}4^k=\frac{(36+4)^n-(36-4)^n}{2}=\frac{40^n-32^n}{2}$$

3.

א) על-ידי הזזת כל ההילוך צעד אחד ימינה, נקבל שזהו מספר ההילוכים $(1,0)\to(n+1,n)$, או $(0,0)\to(n+1,n)$, או $(0,0)\to(n+1,n+1)$, הנמצאים ממש מתחת לישר הנ"ל.

ב) נפרק כל הילוך $(0,0)\to(n+1,n+1)$, הנמצא מתחת לישר $y=x$ או נוגע בו, לשני חלקים: הראש $(0,0)\to(k+1,k+1)$, עד נקודת הנגיעה הראשונה בישר אחרי $(0,0)$, והזנב $(k+1,k+1)\to(n+1,n+1)$. כאן $0\le k\le n$, מספר האפשרויות לראש (הנמצא ממש מתחת לישר) הוא לפי סעיף א' C_k, ומספר האפשרויות לזנב הוא C_{n-k}. מסכמים ומקבלים מש"ל.

4.

א) שיקול צביעה: יש $\frac{mn}{2}$ משבצות מצבע אחד, $\frac{mn}{2}-2$ מהצבע השני.

ב) הופכים את הלוח למסילה סגורה, למשל בעזרת המסרק של גומורי. הוצאת שתי משבצות בצבעים שונים יוצרת שתי מסילות פתוחות באורכים <u>זוגיים</u> (בגלל הצביעה לסירוגין), ואותן אפשר לכסות באבני דומינו.

5. חבורת הסימטריה היא החבורה הדיהדרלית D_5, המכילה 5 סיבובים ו-5 שיקופים. בדיקת מספר המסלולים של פעולתה על קודקודי המחומש נותנת, בעזרת משפט פרובניוס-ברנסייד:

$$\frac{1}{10}\left(c^5+5c^3+4c^1\right)$$

6. נתבונן בפיתוח

$$\frac{1}{2}[(1+x)^n+(1-x)^n]=\binom{n}{0}+\binom{n}{2}x^2+\binom{n}{4}x^4+\binom{n}{6}x^6+\dots$$

על-ידי הצבת ix במקום x:

$$\frac{1}{2}[(1+ix)^n+(1-ix)^n]=\binom{n}{0}-\binom{n}{2}x^2+\binom{n}{4}x^4-\binom{n}{6}x^6+\dots$$

ועל-ידי חיבור שני הביטויים וחילוק ב-2:

$$\frac{1}{4}[(1+1)^n+(1-1)^n+(1+i)^n+(1-i)^n]=\binom{n}{0}+\binom{n}{4}+\binom{n}{8}+\binom{n}{12}+\dots$$

מכיוון ש- $|1+i|=|1-i|=\sqrt{2}$ נקבל $\frac{1}{4}\cdot 2^n+O\left(2^{n/2}\right)$ כנדרש.

<u>מועד ב׳</u>

1. בתמורה על $[n]$ עם k מחזורים זרים, ישנן שתי אפשרויות לגבי המספר n: או שהוא במחזור לבדו, ואז יש $c(n-1,k-1)$ תמורות אפשריות על יתר המספרים; או שהוא במחזור עם אחרים, ואז השמטתו נותנת $c(n-1,k)$ תמורות אפשריות על שאר המספרים, ומכל אחת מהן יש $n-1$ דרכים לשחזר את מיקום המספר n. שימוש בקשר $s(n,k)=(-1)^{n-k}\cdot c(n,k)$ מסיים את ההוכחה.

2. אם נוריד מדרגה $2i$ מהאיבר ה-i-י נקבל סדרה עולה בקטע $[998,1980]$, וכן להיפך. לכן התשובה היא: $\binom{983}{10}$.

3.

א) נמספר את $2(n+1)$ הנקודות באופן ציקלי מ-1 עד $2n+2$. קל לראות שנקודה 1 חייבת להתחבר במיתר לנקודה עם אינדקס זוגי, נאמר $2(k+1)$ ($0\le k\le n$). מיתר זה מחלק את יתר הנקודות לשני ״מעגלים״, בעלי $2k$ ו-$2(n-k)$ נקודות בהתאמה. מכאן ניתן להסיק את נוסחת הרקורסיה.

ב) נוסחת הרקורסיה, וגם תנאי ההתחלה $M_0=1$, הם אלו של מספרי קטלאן. לכן M_n הוא מספר קטלאן ה-n-י.

4. משפט ארדש-סקרש.

.5

א) $a(x)=1+\frac{x^2}{1-2x}=\frac{(1-x)^2}{1-2x}$

ב) $b(x)=\frac{1-2x}{(1-x)^2}=1-\frac{x^2}{(1-x)^2}=1-\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{n+2}$ ולכן $b_{100}=-99$.

.6 הפונקציה היוצרת המעריכית היא

$$\left(e^x\right)^5\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^3=\frac{1}{8}\left(e^{8x}+3e^{6x}+3e^{4x}+e^{2x}\right)$$

ולכן התשובה היא

$$a_n=\frac{1}{8}\left(8^n+3\cdot 6^n+3\cdot 4^n+2^n\right)\quad (n\geq 0)$$

<u>בדיקה:</u> לפי הנוסחה הנ״ל $a_1=5$, $a_2=28$. באמת, מספר חד-ספרתי בתנאים הנתונים מורכב מספרה אחת אי-זוגית (5 אפשרויות), ומספר דו-ספרתי כנ״ל מורכב משתי ספרות אי-זוגיות כלשהן (25 אפשרויות) או משתי ספרות זוגיות זהות (2, 4 או 6 - עוד 3 אפשרויות).