

מבוא לקומבינטוריקה (88554) \ פרופ' רון עדין בחינת סיום (מועד ב')

משך הבחינה: שעתיים וחצי (150 דקות).
מותר להשתמש בדף הנוסחאות המצורף. אין להשתמש בכל חומר עזר אחר, פרט למחשבון.
יש לענות על 5 מתוך 6 השאלות. כל השאלות שוות-משקל.
נא להסביר ולנמק בבירור את הפתרון, ולכלול במחברת את כל החישובים הנחוצים.

הצלחה!

1. הוכח את נוסחת הרקורסיה
$$s(n, k) = s(n-1, k-1) - (n-1) \cdot s(n-1, k) \quad (n, k \geq 1)$$

עבור מספרי סטירלינג מסוג ראשון.

2. מהו מספר הסדרות העולות של 10 מספרים שלמים, כולם בקטע $[1000, 2000]$, כך
שהפרש בין כל שני אברים עוקבים בסדרה הוא לפחות 3?

3. יהי M_n מספר הדרכים לחבר בזוגות $2n$ נקודות נתונות על היקף מעגל, על-ידי n מיתרים
לא נחתכים ($n \geq 1$). נסמן גם: $M_0 := 1$.
(א) הוכח:

$$M_{n+1} = \sum_{k=0}^n M_k M_{n-k} \quad (n \geq 0)$$

(ב) הוכח בעזרת סעיף א', או בכל דרך אחרת:

$$M_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

4. (א) הוכח: אם n, m טבעיים אז לכל סדרה באורך $mn+1$ של מספרים ממשיים שונים יש:
או תת-סדרה מונוטונית עולה באורך $m+1$, או תת-סדרה מונוטונית יורדת באורך $n+1$
(או שתיהן).

(ב) תן דוגמא של סדרה באורך mn שאין לה תת-סדרות כנ"ל.

5. (א) רשום את טור החזקות הפורמלי

$$a(x) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^{n+2} = 1 + x^2 + 2x^3 + 4x^4 + 8x^5 + 16x^6 + \dots$$

כפונקציה רציונלית (מנה של שני פולינומים).

(ב) רשום את $b(x) = \frac{1}{a(x)}$ גם כפונקציה רציונלית וגם כטור חזקות פורמלי. בפרט, מהו
מקדם x^{100} בטור זה?

6. מצא את מספר המספרים השלמים בעלי n ספרות בדיוק (לפי בסיס 10) שאינם מכילים את
הספרות 0, 8 אבל כל ספרה זוגית אחרת (2, 4, 6) מופיעה מספר זוגי (אולי אפס) של
פעמים; אין הגבלה על ספרות אי-זוגיות. בדוק תשובתך עבור $n = 1, 2$.