

מבוא לקומבינטוריקה (88554) \ פרופ' רון עדין בחינת סיום (מועד ב')

משך הבחינה: שעתיים וחצי (150 דקות).
מותר להשתמש בדף הנוסחאות המצורף. אין להשתמש בכל חומר עזר אחר, פרט
למחשבון.
יש לענות על 5 מתוך 6 השאלות. כל השאלות שוות-משקל.
נא להסביר ולנמק בבירור את הפתרון, ולכלול במחברת את כל החישובים הנחוצים.

בהצלחה!

1. הוכח: מספר הדרכים להכפיל $n+1$ גורמים בסדר נתון, ללא שימוש בחוק

הקיבוץ (אסוציאטיביות), הוא $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$. למשל, עבור $n=3$ האפשרויות הן

$$((ab)c)d \quad (a(bc))d \quad (ab)(cd) \quad a((bc)d) \quad a(b(cd))$$

2. מצא את כל המספרים השלמים $40 \leq k \leq 60$ שעבורם המקדם הבינומי $\binom{100}{k}$

אינו מתחלק ב-11.

3. פתור את נוסחת הרקורסיה

$$a_n + 3a_{n-1} + 3a_{n-2} + a_{n-3} = 8 \quad (n \geq 3)$$

עם תנאי ההתחלה

$$a_0 = a_1 = 0$$

ובכפוף לדרישה

$$a_n = O(n) \quad (n \rightarrow \infty).$$

בפרט, מצא את a_2 .

4. כמה מספרים בעלי n ספרות לפי בסיס 7 מכילים כל אחת מהספרות 0, 1, 2,

מספר זוגי של פעמים? אין הגבלה על מספר ההופעות של 3, 4, 5, 6. בדוק את

תשובתך עבור $n=1, 2$.

5. הוכח: לכל α ממשי קיימים אינסוף ערכים טבעיים של n שעבורם $\|n\alpha\| \leq \frac{1}{n}$,

כאשר $\|x\|$ הוא המרחק מ- x למספר השלם הקרוב ביותר:

$$\|x\| := \min_{m \in \mathbb{Z}} |x - m|$$

6. מצא את מספר הפתרונות של המשוואה $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1000$ כאשר x_i הם

מספרים שלמים אי-שליליים.