מבוא לקומבינטוריקה (89254) \ פרופ' רון עדין
דף נוסחאות לבחינה

תמורות וצירופים:

תמורות בלי חזרות: $(n)_k = \frac{n!}{(n-k)!}$

תמורות עם חזרות: n^k

צירופים בלי חזרות: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

צירופים עם חזרות: $\left(\binom{n}{k}\right) = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$

מקדמים בינומיים וכו':

נוסחת חזרה (למשולש פסקל): $\binom{m+n}{m} = \binom{m+n-1}{m-1} + \binom{m+n-1}{m}$

משפט הבינום: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

מקדם מולטינומי: $\binom{n}{n_1,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1!\cdots n_k!}$

משפט המולטינום: $(x_1+\ldots+x_k)^n = \sum_{\substack{n_1,\ldots,n_k \ge 0 \\ n_1+\ldots+n_k = n}} \binom{n}{n_1,\ldots,n_k} x_1^{n_1}\cdots x_k^{n_k}$

נוסחת סטירלינג: $n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot \left(1+o(1)\right)$

קירוב למקדם בינומי: $\binom{n}{pn} = 2^{n[H(p)+o(1)]} \qquad (0<p<1 \;\; const., \quad n\to\infty)$

כאשר פונקצית האנטרופיה

$$H(p) = -p\log_2 p - (1-p)\log_2(1-p) \qquad (0<p<1)$$

בעית הקלפי:

$$P(S_2 \mid S_1) = \frac{a-b}{a+b}$$

$$P(S_3 \mid S_1) = \frac{a+1-b}{a+1}$$

כאשר: $S_1 =$ "א" קיבל a קולות בסה"כ, "ב" קיבל b קולות $(a \ge b)$;

$S_2 =$ כנ"ל, כאשר "א" הוביל ממש כל הזמן, החל מפתק ההצבעה הראשון.

$S_3 =$ כנ"ל, כאשר "א" הוביל או השיג תיקו כל הזמן.

<u>מספרי קטלאן</u>: ($a=n+1, \quad b=n$)

$$C_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}=\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n-1}$$

נוסחת חזרה למספרי קטלאן:

$$C_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}C_kC_{n-k} \qquad (n\geq 0)$$
$$C_0=1$$

<u>מקדם בינומי מוכלל</u>:

$$\binom{\alpha}{n}:=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \qquad (n=1,2,\dots)$$

(α ממשי כלשהו)

$$\binom{\alpha}{0}:=1$$

בפרט:

$$\binom{-k}{n}=\binom{n+k-1}{n}(-1)^n \qquad (n\geq 0,\ k=1,2,\dots)$$
$$\binom{-1/2}{n}=\binom{2n}{n}\left(-1/4\right)^n \qquad (n\geq 0)$$
$$\binom{1/2}{n}=\frac{1}{2}C_{n-1}\left(-1/4\right)^{n-1} \qquad (n\geq 1)$$

<u>טורי חזקות פורמליים</u>:

$$(1+x)^{\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$$ (לכל α ממשי)

בפרט:

$$(1-x)^{-k}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{n}x^n \qquad (k=1,2,\dots)$$
$$(1-4x)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}x^n$$
$$1-(1-4x)^{1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{n+1}\binom{2n}{n}x^{n+1}=2x\cdot\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^n$$
$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right]=\frac{1}{1-x^2}=1+x^2+x^4+x^6+\dots$$
$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots$$
$$\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\dots$$
$$\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})=\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\dots$$