

מבוא לקומבינטוריקה (89254) \ פרופ' רון עדין
בחינת סיום (מועד א')

משך הבחינה: שעתיים וחצי (150 דקות).
 מותר להשתמש בדף הנוסחאות המצורף. אין להשתמש בכל חומר עזר אחר (גם לא במחשבון).
 יש לענות על 5 מתוך 6 השאלות. כל השאלות שוות-משקל.
 נא להסביר ולנמק בבירור את הפתרון, ולכלול במחברת את כל החישובים הנחוצים.

מהצחה!

1. הוכיחו: אם p ראשוני, $0 \leq k \leq n$ שלמים, אז חזקת p המחלקת את המקדם הבינומי $\binom{n}{k}$ שווה למספר העמודות עם נשא (carry) בחיבור $k + (n - k) = n$ לפי בסיס p .

2. מהו מספר הילוכי השריג מהנקודה $(0,0)$ לנקודה $(10,10)$ העוברים דרך הנקודה $(5,5)$ כך שחלקם הראשון (בין $(0,0)$ ל- $(5,5)$) נמצא ממש מתחת לישר $y = x$, ואילו חלקם השני (בין $(5,5)$ ל- $(10,10)$) נמצא ממש מעל לישר $y = x$? כל צעד בהילוך הוא מנקודה (m,n) לנקודה $(m+1,n)$ או $(m,n+1)$.

3. מצאו נוסחה מפורשת עבור סדרה (a_n) המקיימת:
 $2a_n - 5a_{n-1} + 2a_{n-2} = 0 \quad (n \geq 2)$
 $a_0 = 3$
 $a_n = O(1) \quad (n \rightarrow \infty)$

4. כמה מספרים שלמים בין 1 ל-9000 אינם מתחלקים באף אחד מהמספרים 8, 9, 10?

5. בכמה מספרים, בעלי 20 ספרות עשרוניות לכל היותר, יש מספר זוגי של 1-ים ומספר זוגי של 9-ים?

6. מצאו נוסחה מפורשת עבור סדרה (b_n) המקיימת:
 $b_n = \sum_{k=1}^n 3^k b_{n-k} \quad (n \geq 1)$
 $b_0 = 1$