

**מבוא לקומבינטוריקה (89254) \ פרופ' רון עדין**  
**תשובות לשאלות בחינות תשס"ו (מועדים א', ב')**

**מועד א'**

1. הוכחת משפט לוקאס מסתמכת על הנוסחה

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left( \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k}{p^i} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-k}{p^i} \right\rfloor \right) \cdot \binom{n}{k}$$

עבור חזקת  $p$  המחלקת את המקדס הבינומי

$$2. \quad 14^2 = 196 \quad \cdot \left( C_4 = \frac{1}{9} \binom{9}{4} = 14 \right)$$

$$3. \quad a_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad (n \geq 0)$$

$$4. \quad e_0 = s_0 - s_1 + s_2 - s_3 = 9000 - (1125 + 1000 + 900) + (125 + 225 + 100) - 25 = 6400$$

$$5. \quad a(x) = \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 (e^x)^8 = \frac{1}{4} (e^{10x} + 2e^{8x} + e^{6x}) \quad \text{פונקציה יוצרת מעריכית:}$$

$$a_{20} = \frac{1}{4} (10^{20} + 2 \cdot 8^{20} + 6^{20}) \quad \text{תשובה:}$$

$$6. \quad b_n = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ 3 \cdot 6^{n-1}, & n \geq 1. \end{cases}$$

## מועד ב'

1. משפט ארדש-סקרש.

2. מספר הילוכי השריג  $(n, n) \rightarrow (0, 0)$  הנמצאים מתחת לישר  $y = x$  או נוגעים בו

$$\cdot \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \quad \text{הוא (אך לא חוצים אותו)}$$

$$a_n = (2 - 2n) \cdot 2^n + 3^n \quad (n \geq 0) \quad 3.$$

4. מספר הפתרונות של המשוואה  $x_1 + \dots + x_{20} = 35$  כאשר  $(\forall i) 0 \leq x_i \leq 9$  הוא

$$\cdot \binom{20}{0} \binom{54}{19} - \binom{20}{1} \binom{44}{19} + \binom{20}{2} \binom{34}{19} - \binom{20}{3} \binom{24}{19}$$

5. מקדם  $\frac{x^{10}}{10!}$  בפונקציה היוצרת המעריכית  $\frac{1}{2}(e^{6x} - e^{4x}) = \frac{1}{2}(e^x)^5 = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ , או

לחילופין התוצאה של הצבת  $x=1$  בפונקציה  $\frac{1}{2}[(5+x)^{10} - (5-x)^{10}]$ , הם

$$\cdot \frac{1}{2} \left[ 1 - \left( \frac{2}{3} \right)^{10} \right] : \frac{1}{2}(6^{10} - 4^{10}). \quad \text{אחרי חילוק ב-} 6^{10}, \text{ ההסתברות היא}$$

6. נוסחת חזרה:  $t_n = t_{n-1} + 2t_{n-2} \quad (n \geq 3)$

$$t_n = \frac{1}{3} [2^{n+1} - (-1)^{n+1}] \quad (n \geq 1) \quad \text{נוסחה מפורשת}$$