

מבוא לקומבינטוריקה (89254) \ פרופ' רון עדין בחינת סיום (מועד ב')

משך הבחינה: שעתיים וחצי (150 דקות).
מותר להשתמש בדף הנוסחאות המצורף. אין להשתמש בכל חומר עזר אחר (גם לא במחשבון).
יש לענות על 5 מתוך 6 השאלות. כל השאלות שוות-משקל.
נא להסביר ולנמק בבירור את הפתרון, ולכלול במחברת את כל החישובים הנחוצים.

מהצחה!

1. הוכיחו: אם n, m טבעיים אז לכל סדרה באורך $mn+1$ של מספרים ממשיים שונים יש: א תת-סדרה מונוטונית עולה באורך $m+1$, א תת-סדרה מונוטונית יורדת באורך $n+1$.

2. יהי n מספר טבעי. מהו מספר המילים באורך $2n$, באותיות "א", "ב" בלבד (n אותיות מכל סוג), כך שבכל ריפא (prefix) שלהן מספר ה-"א"-ים הוא לפחות כמו מספר ה-"ב"-ים? למשל, "אבאבב" היא מילה חוקית אבל "אבבא" – לא.

3. פתרו את נוסחת החזרה

$$a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 2^n \quad (n \geq 2)$$
$$a_0 = a_1 = 3$$

4. כמה מספרים שלמים, בעלי 20 ספרות עשרוניות לכל היותר, הם בעלי סכום ספרות 35?

5. מה ההסתברות שב-10 הטלות קוביה רצופות יתקבל הערך "3" מספר אי-זוגי של פעמים?

6. עלינו לרצף שביל (חד-ממדי) במרצפות בצבעים אפור, אדום וחום. אורך כל מרצפת אדומה הוא יחידה אחת, ואילו אורך כל מרצפת אפורה או חומה הוא שתי יחידות. לא ניתן להבחין בין מרצפות מאותו צבע.
יהי t_n מספר הדרכים לרצף שביל באורך n במרצפות הנ"ל. למשל:

$$t_1 = 1, \quad t_2 = 3$$

רשמו נוסחת חזרה ומצאו נוסחה מפורשת עבור a_n . בדקו את תשובתכם עבור $n = 3$.