

מבוא לקומבינטוריקה (89254) \ פרופ' רון עדין בחינת סיום (מועד א')

משך הבחינה: שעתיים וחצי (150 דקות).
 מותר להשתמש בדף הנוסחאות המצורף. אין להשתמש בכל חומר עזר אחר, פרט למחשבון.
 יש לענות על 5 מתוך 6 השאלות. כל השאלות שוות-משקל.
 נא להסביר ולנמק בבירור את הפתרון, ולכלול במחברת את כל החישובים הנחוצים.

מהצחה!

1.

(א) הוכיחו: אם n, m טבעיים אז לכל סדרה באורך $mn+1$ של מספרים ממשיים שונים יש: א תת-סדרה מונוטונית עולה באורך $m+1$, א תת-סדרה מונוטונית יורדת באורך $n+1$ (או שתיהן).
 (ב) תנו דוגמא של סדרה באורך mn שאין לה תת-סדרות כנ"ל.

2. מצאו פתרון לנוסחת החזרה

$$a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 4n \quad (n \geq 2)$$

המקיים

$$a_0 = 8$$

$$|a_n| = O(2^n) \quad (n \rightarrow \infty)$$

3. באיזו חזקה של 2 מתחלק המקדם הבינומי $\binom{100}{20}$? נמקו.

4. בתוך משולש שווה-צלעות שאורך צלעו 4 מסומנות 17 נקודות. הוכיחו שיש ביניהן לפחות זוג אחד של נקודות שהמרחק ביניהן הוא 1 לכל היותר.

5. "עץ בינרי מלא" הוא עץ המצויר במישור, עם קודקוד מיוחד ("שורש"), כך שלכל קודקוד: א אין בכלל צאצאים (זהו "עלה"), א יש בדיוק שני צאצאים (זהו "קודקוד פנימי"), שאחד מהם "צאצא ימני" והשני "צאצא שמאלי". יהי מספר העצים הבינריים המלאים עם n קודקודים פנימיים. למשל: $b_2 = 2$.



רשמו נוסחת חזרה עבור b_n , ובעזרתה (או בדרך אחרת) הוכיחו: $b_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$

6. כמה מספרים שלמים, בעלי 30 ספרות עשרוניות (כולן שונות מאפס), הם בעלי סכום ספרות 50?