

## מבוא לקומבינטוריקה (89254) \ פרופ' רון עדין בחינת סיום (מועד ב')

משך הבחינה: שעתיים וחצי (150 דקות).  
 מותר להשתמש בדף הנוסחאות המצורף. אין להשתמש בכל חומר עזר אחר, פרט למחשבון.  
 יש לענות על 5 מתוך 6 השאלות. כל השאלות שוות-משקל.  
 נא להסביר ולנמק בבירור את הפתרון, ולכלול במחברת את כל החישובים הנחוצים.

**מהצחה!**

1. יהיו  $a > b > 0$  שלמים. הוכיחו: מספר הילוכי השריג מהנקודה  $(1,0)$  לנקודה  $(a,b)$  שאינם נוגעים בישר  $y = x$  הוא

$$\binom{a+b-1}{b} - \binom{a+b-1}{a} = \frac{a-b}{a+b} \binom{a+b}{b}$$

(אין להסתמך על משפטים בנושא בעית הקלפי או מספרי קטלאן; בכל שלב בהילוך ניתן לנוע מ- $(m,n)$  ל- $(m+1,n)$  או ל- $(m,n+1)$ ).

2. מצאו את כל הפתרונות  $(a_n)$  של נוסחת החזרה

$$a_n + 2a_{n-1} - 2a_{n-2} - 3a_{n-3} = 0 \quad (n \geq 3)$$

המקיימים

$$|a_n| = O(1) \quad (n \rightarrow \infty).$$

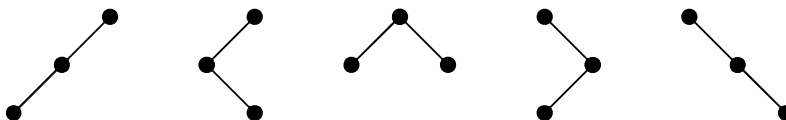
נמקו.

3. באיזו חזקה של 3 מתחלק המספר  $123!$ ? נמקו.

4. הוכיחו: בכל סדרה של 100 מספרים שלמים יש תת-סדרה רצופה (לא ריקה) שסכום אבריה מתחלק ב-100.

5. "עץ בינרי חלקי" הוא עץ המצויר במישור, עם קודקוד מיוחד ("שורשי"), כך שלכל קודקוד יש לכל היותר שני צאצאים. כל צאצא מסומן "ימני" או "שמאלי"; אם לקודקוד יש שני צאצאים, אחד מהם הוא "ימני" והשני "שמאלי". יהי מספר העצים הבינריים החלקיים עם  $n$  קודקודים. למשל:

$$b_3 = 5$$



רשמו נוסחת חזרה עבור  $b_n$ , ובעזרתה (או בדרך אחרת) הוכיחו:  $b_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$

6. מצאו את מקדם  $x^{10}$  בפיתוח של  $(1+x+x^2+x^3)^{100}$ .