מבוא לקומבינטוריקה (89254) \ פרופ' רון עדין
תשובות לשאלות בחינות תשס"ח (מועדים א', ב')

מועד א'

.1

א) $a_4=10\,,a_2=2$.

ב) על-ידי חיסור הנוסחה הנתונה עבור n ועבור $n-1$ נקבל רקורסיה מסדר סופי: $(n\ge 3)\quad a_n-a_{n-1}-2a_{n-2}=0$. פתרונה, בעזרת תנאי ההתחלה a_1, a_2 או מאוחרים יותר (לא a_0 !), הוא: $(n\ge 1)\quad a_n=\frac{2}{3}\left(2^n-(-1)^n\right)$.

.2

א) דרך א: $\left(\!\binom{c}{4}\!\right)=\binom{c+3}{4}$. דרך ב: בעזרת משפט פרובניוס-ברנסייד, עבור פעולת החבורה הסימטרית S_4 על קדקדי הגרף השלם K_4. סוגי התמורות הם: 1 תמורה מטיפוס $(1)(2)(3)(4)$, התורמת c^4; 6 תמורות מטיפוס $(12)(3)(4)$, התורמות $6c^3$; 3 תמורות מטיפוס $(12)(34)$, התורמות $3c^2$; 8 תמורות מטיפוס $(123)(4)$, התורמות $8c^2$; 6 תמורות מטיפוס (1234), התורמות $6c^1$. בסה"כ, מספר הצביעות הוא $\frac{1}{24}\left(c^4+6c^3+11c^2+6c^1\right)$.

ב) כאן S_4 פועלת על 6 קשתות הגרף השלם K_4, דרך פעולתה על הקדקדים. סוגי התמורות הם: 1 תמורה מטיפוס $(1)(2)(3)(4)$ על קדקדים, $(12)(13)(14)(23)(24)(34)$ על קשתות, התורמת d^6; 6 תמורות מטיפוס $(1,2)(3)(4)$ על קדקדים, $(12)(13,23)(14,24)(34)$ על קשתות, התורמות $6d^4$; 3 תמורות מטיפוס $(1,2)(3,4)$ על קדקדים, $(12)(13,24)(14,23)(34)$ על קשתות, התורמות $3d^4$; 8 תמורות מטיפוס $(1,2,3)(4)$ על קדקדים, $(12,23,13)(14,24,34)$ על קשתות, התורמות $8d^2$; 6 תמורות מטיפוס $(1,2,3,4)$ על קדקדים, $(12,23,34,14)(13,24)$ על קשתות, התורמות $6d^2$.
בסה"כ, מספר הצביעות הוא $\frac{1}{24}\left(d^6+9d^4+14d^2\right)$.

.3

ב) $a(x)=1-\frac{x}{1-x}=\frac{1-2x}{1-x}$, ולכן $a(x)^{-1}=\frac{1-x}{1-2x}=1+\sum_{n=1}^{\infty}2^{n-1}x^n$.

.4

א) אגף שמאל = בחירת קבוצה של k שחקנים מתוך n מועמדים (k לא נתון מראש), ואחר-כך בחירת קפטיין מתוכם. אגף ימין = בחירת קפטיין מתוך n מועמדים, ואחר-כך בחירת שחקנים נוספים לקבוצה.

ב) על-ידי גזירה פעמיים של נוסחת הבינום $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$ נקבל $n(n-1)(1+x)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k(k-1)x^{k-2}$, ועל-ידי הצבת $x=1$ ושימוש בנוסחה מסעיף א' נקבל

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k(k-1) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k = n(n-1)\cdot 2^{n-2} + n\cdot 2^{n-1} = n(n+1)\cdot 2^{n-2}.$$

5. הוכחה באינדוקציה, תוך שימוש בנוסחת רקורסיה למספרי סטירלינג; או הוכחה קומבינטורית על-ידי ספירת פונקציות (או תמורות עם חזרות).

6.

א) $\left(\binom{999}{10}\right) = \binom{1008}{10}$

ב) $\left(\binom{500}{10}\right) = \binom{509}{10}$

<u>מועד ב'</u>

1. על-ידי חיסור הנוסחה הנתונה עבור $n-1$ מהנוסחה עבור n נקבל

$$a_n - a_{n-1} = 2(a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_0) \qquad (n \ge 2),$$

ועל-ידי חיסור נוסף:

$$a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} = 2a_{n-1} \qquad (n \ge 3).$$

נשים לב שרקורסיה זו אינה מתחשבת בערך של a_0. מהנוסחה המקורית ניתן לחשב את תנאי ההתחלה <u>הרלוונטיים</u>

$$a_1 = 2,\ a_2 = 8$$

ולמצוא את הפתרון

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^n - \left(2-\sqrt{3}\right)^n\right] \qquad \underline{(n \ge 1)}$$

2.

א) על-ידי ניתוח מספר המחזורים של פעולת חבורת הסימטריה D_6 על קדקדי המשושה נקבל, בעזרת משפט פרובניוס-ברנסייד:

$$\frac{1}{12}\left(c^6 + 3c^4 + 4c^3 + 2c^2 + 2c^1\right)$$

ב) כאן פועלת רק החבורה הציקלית C_6, והתשובה:

$$\frac{1}{6}\left(c^6 + c^3 + 2c^2 + 2c^1\right)$$

3. עקרון שובך היונים.

.4

א) <u>דרך א׳ :</u> שימוש בזהות

$$\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}=\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$$

לקבלת

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}=\frac{1}{n+1}\left(2^{n+1}-1\right)$$

<u>דרך ב׳ :</u> נוסחת הבינום

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k=(1+x)^n$$

נותנת, בעזרת אינטגרל מסוים $\int_0^1 dx$:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{k+1}=\frac{(1+1)^{n+1}-(1+0)^{n+1}}{n+1}$$

ב) שימוש בזהות

$$\frac{1}{(k+2)(k+1)}\binom{n}{k}=\frac{1}{(n+2)(n+1)}\binom{n+2}{k+2}$$

או בשתי אינטגרציות נותן

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+2)(k+1)}\binom{n}{k}=\frac{2^{n+2}-1-(n+2)}{(n+2)(n+1)}$$

5. הפונקציה היוצרת המעריכית היא

$$\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^5\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^5=\left(\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{4}\right)^5=\frac{1}{2^{10}}\left(e^{10x}-5e^{6x}+10e^{2x}-10e^{-2x}+5e^{-6x}-e^{-10x}\right)$$

ולכן התשובה (מקדם $\frac{x^n}{n!}$) היא

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2^{10}}\left(10^n-5\cdot 6^n+10\cdot 2^n-10\cdot(-2)^n+5\cdot(-6)^n-(-10)^n\right) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2^9}\left(10^n-5\cdot 6^n+10\cdot 2^n\right), & \text{if } n \text{ is odd;} \\ 0, & \text{if } n \text{ is even.} \end{cases} \end{aligned}$$

בפרט :

$$a_0=a_1=a_2=a_3=a_4=0,\quad a_5=120.$$

בדיקה : במספר עשרוני עם 4 ספרות או פחות לא יכולות להופיע כל 5 הספרות הזוגיות, ומספר עם 5 ספרות (בהגבלות שבשאלה) הוא תמורה של 5 הספרות הזוגיות, ויש $5!=120$ כאלו.

6. מוכיחים שמספר הדרכים להכניס סוגריים למכפלה מקיים את הרקורסיה ואת תנאי ההתחלה של מספרי קטלאן.