

מבוא לקומבינטוריקה (89254) \ פרופ' רון עדין בחינת סיום (מועד ב')

משך הבחינה: שעתיים וחצי (150 דקות).
מותר להשתמש בדף הנוסחאות המצורף. אין להשתמש בכל חומר עזר אחר, פרט
למחשבון.
יש לענות על 5 מתוך 6 השאלות. כל השאלות שוות-משקל.
נא להסביר ולנמק בבירור את הפתרון, ולכלול במחברת את כל החישובים הנחוצים.

קהל3חה!

1. פתור את נוסחת החזרה

$$a_n = 2(a_{n-1} + 2a_{n-2} + 3a_{n-3} + \dots + na_0) \quad (n \geq 1)$$

עם תנאי ההתחלה

$$a_0 = 1.$$

בדוק את תשובתך עבור a_1, a_2 .

2.

(א) בכמה דרכים ניתן לצבוע את הקדקדים של משושה משוכלל ב- c צבעים,
כאשר שתי צביעות המתקבלות זו מזו על-ידי סיבוב או שיקוף של המשושה
נחשבות זהות?

(ב) אותה שאלה, כאשר רק צביעות המתקבלות זו מזו על-ידי סיבוב של
המשושה נחשבות זהות.

3. הוכח שלכל מספר ממשי x ולכל $\varepsilon > 0$ קיים מספר רציונלי $\frac{p}{q}$ שלמים, p, q

$$(q > 0) \text{ כך ש-} \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{\varepsilon}{q}$$

4.

(א) הוכח:

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1} \quad (n \geq 0)$$

(ב) חשב:

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+2)(k+1)} \binom{n}{k} \quad (n \geq 0)$$

5. מצא את מספר המספרים השלמים בעלי n ספרות לכל היותר (לפי בסיס 10) כך
שכל ספרה זוגית (0, 2, 4, 6, 8) מופיעה מספר אי-זוגי של פעמים, וכל ספרה אי-
זוגית מופיעה מספר זוגי של פעמים. בדוק את תשובתך עבור $n \leq 5$.

6. הוכח שמספר קטלאן $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ הוא מספר הדרכים להכניס סוגריים

למכפלה של $n+1$ גורמים כך שהיא תהפוך למכפלה של שני גורמים בכל פעם.

למשל, עבור המכפלה $a \cdot b \cdot c \cdot d$ ($C_3 = 5, n+1 = 4$) האפשרויות הן:

$((a \cdot b) \cdot c) \cdot d, (a \cdot (b \cdot c)) \cdot d, (a \cdot b) \cdot (c \cdot d), a \cdot ((b \cdot c) \cdot d), a \cdot (b \cdot (c \cdot d))$

הערה: לא מספיק להסתמך על התוצאה המקבילה עבור עצים בינריים שלמים.