

## מבוא לקומבינטוריקה (89254) \ פרופ' רון עדין בחינת סיום (מועד א')

משך הבחינה: שעתיים וחצי (150 דקות).  
מותר להשתמש בדף הנוסחאות המצורף. אין להשתמש בכל חומר עזר אחר, פרט  
למחשבון.  
יש לענות על 5 מתוך 6 השאלות. כל השאלות שוות-משקל.  
נא להסביר ולנמק בברור את הפתרון, ולכלול במחברת את כל החישובים הנחוצים.

### *בהצלחה!*

1. לוח משובץ בגודל  $6 \times 6$  אפשר לכסות על-ידי 18 אבני דומינו. הוכח שלכל כיסוי  
כזה קיים ישר (אופקי או אנכי) החותך את הלוח לשני חלקים בלי לחתוך אף  
אבן דומינו.

2. כמה סדרות  $(a_1, \dots, a_{100})$  של 100 מספרים מתוך  $\{0, 1, \dots, 1000\}$  מקיימות  
 $a_{i+1} \leq a_i - 2$  ( $1 \leq i \leq 99$ ) ?

3. הוכח:

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{3} + \binom{n}{6} - \binom{n}{9} + \dots = O(3^{n/2})$$

4. בכמה דרכים ניתן לצבוע ב- $c$  צבעים את הקודקודים של מצולע משוכלל בעל 9  
צלעות, אם שתי צביעות המתקבלות זו מזו על-ידי סיבוב או שיקוף של המצולע  
נחשבות זהות?

5. מצא כמה מספרים שלמים בעלי  $n$  ספרות בדיוק (לפי בסיס 10):  
אינם מכילים את הספרות 0, 1;  
מכילים כל ספרה זוגית (שאיננה 0) מספר זוגי (אולי אפס) של פעמים;  
ומכילים כל ספרה אי-זוגית (שאיננה 1) מספר אי-זוגי של פעמים.  
בדוק את תשובתך עבור  $n \leq 5$ .

6. פתור את נוסחת הרקורסיה

$$F_{n+2} = \sum_{i=0}^n F_i F_{n-i} \quad (n \geq 0)$$

עם תנאי ההתחלה

$$F_0 = 1, \quad F_1 = 0.$$

בדוק את תשובתך עבור  $n \leq 6$ .