מבוא לקומבינטוריקה (89254) \ פרופ' רון עדין
תשובות לשאלות בחינות תש"ע (מועדים א', ב')

מועד א'

1. מתוך שעורי הבית (תרגיל מס' 1).

2. $\binom{902}{100}$

3. אם $\omega = e^{2\pi i/3}$ (שורש יחידה מרוכב מסדר 3) אז $1^k + \omega^k + \omega^{2k} = 0$ לכל k שלם שאינו מתחלק ב-3, ואילו $1^k + \omega^k + \omega^{2k} = 3$ לכל k שלם המתחלק ב-3. לכן
$$(1-1)^n + (1-\omega)^n + (1-\omega^2)^n = 3 \cdot \sum_{3|k} (-1)^k \binom{n}{k}$$
בעזרת חישוב ישיר מקבלים כי $|1-\omega| = \left|1 - \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right| = \left|\frac{3-i\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{3}$ וגם $\left|1-\omega^2\right| = \sqrt{3}$, ומכאן מקבלים מש"ל.

4. $\frac{1}{18}\left(c^9 + 9c^5 + 2c^3 + 6c\right)$

5. הפונקציה היוצרת המעריכית היא
$$a(x) = \left[\frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)\right]^4 \left[\frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)\right]^4 = \frac{1}{2^8}\left(e^{2x} - e^{-2x}\right)^4$$
והתשובה (אחרי עיבוד): $a_n = \frac{1}{128}\left(8^n - 4 \cdot 4^n\right) = 2^{3n-7} - 2^{2n-5}$ עבור $n > 2$ זוגי, $a_n = 0$ עבור n אי-זוגי או $n = 0, 2$. בפרט, $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = a_5 = 0$ אך $a_4 = 24$. באמת, בכל מספר המקיים את תנאי השאלה חייבות להיות לפחות 4 ספרות, מספר הספרות הוא זוגי, ועבור $n = 4$ המספר הוא תמורה כלשהי של הספרות 3, 5, 7, 9.

6. בחישוב ישיר: $F_0 = F_2 = 1, F_4 = 2, F_6 = 5, F_1 = F_3 = F_5 = 0$. באופן כללי, ניתן להוכיח באינדוקציה ש- $F_n = 0$ עבור כל n אי-זוגי, ולכן עבור F_{2n} מתקיימים הרקורסיה ותנאי ההתחלה של מספרי קטלאן $C_n = \frac{1}{2n+1}\binom{2n}{n}$, ז"א: $F_{2n} = C_n$.
לחילופין, ניתן לקבל עבור הפונקציה היוצרת $F(x) := \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$ את המשוואה $\frac{1}{x^2}\left(F(x) - 1\right) = F(x)^2$, לפתור ולקבל $F(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{2x^2}$ ולכן F_n כנ"ל.

מועד ב'

1. מתוך שעורי הבית (תרגיל מס' 1) : $\frac{1}{2\sqrt{3}}\left[\left(1+\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)^n-\left(1-\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)^n\right]$

2. $\binom{97}{4}$, או באופן אחר $\binom{97}{1}-97\cdot\binom{98}{1}+\binom{98}{2}+\binom{98}{2}\binom{99}{1}-\binom{100}{4}$.

3. מתוך שעורי הבית (תרגיל מס' 4).

4. $\frac{1}{8}(132+20+6\cdot 0)=19$ כי לכל הסיבובים, פרט לזהות ולסיבוב ב-180^0, אין "חלוקת שבת".

5. $2^8\cdot\left[\binom{207}{8}-\binom{200}{1}\binom{204}{5}+\binom{200}{2}\binom{201}{2}\right]$

6. $(n\geq 0)\quad a_n=(3n+1)\cdot(-1)^n+2^n-2$ **ובפרט** $a_3=-4$.