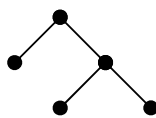
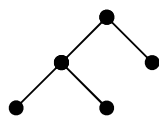


מבוא לקומבינטוריקה (89254) \ פרופ' רון עדין בחינת סיום (מועד א')

משך הבחינה: שעתיים וחצי (150 דקות).
 מותר להשתמש בדף הנוסחאות המצורף. אין להשתמש בכל חומר עזר אחר, פרט למחשבון.
 יש לענות על 5 מתוך 6 השאלות. כל השאלות שוות-משקל.
 נא להסביר ולנמק בברור את הפתרון, ולכלול במחברת את כל החישובים הנחוצים.

קהלצה!

1. "עץ בינרי מלא" הוא עץ המצויר במישור, עם קודקוד מיוחד ("שורש"), כך שכל קודקוד הוא עלה (בלי צאצאים בכלל) או קודקוד פנימי (עם שני צאצאים בדיוק, שאחד מהם הוא "צאצא ימני" והשני "צאצא שמאלי"). יהי b_n מספר העצים הבינריים המלאים עם n קודקודים פנימיים. למשל: $b_2 = 2$.



$$\text{הוכיחו: } b_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

2.

א) בהינתן t, k, n שלמים חיוביים, מצאו כמה סדרות (a_1, \dots, a_k) של k מספרים מתוך $\{1, \dots, n\}$ מקיימות

$$a_{i+1} \geq a_i + t \quad (1 \leq i \leq k-1)$$

ב) כמה קבוצות של 5 מספרים בין 1 ל-70 אינן מכילות שני מספרים עוקבים?

3. הוכיחו שעבור $0 < p < 1$ קבוע, $n \rightarrow \infty$:

$$\log_2 \binom{n}{np} = n \cdot [H(p) + o(1)]$$

כאשר

$$H(p) := -p \log_2 p - (1-p) \log_2 (1-p)$$

4. בכמה אפסים (מצד ימין) מסתיימת ההצגה העשרונית של המקדם הבינומי $\binom{246}{123}$? נמקו.

5. כמה מספרים שלמים בעלי n ספרות לכל היותר לפי בסיס 8 הם בעלי סכום ספרות 20?

6. בכמה דרכים ניתן לצבוע את 6 הקשתות של הגרף השלם K_4 (על 4 קודקודים) ב- c צבעים, כאשר שתי צביעות הנבדלות רק בתמורה של הקודקודים נחשבות זהות?