

## מבוא לקומבינטוריקה (89254) \ פרופ' רון עדין בחינת סיום (מועד ב')

משך הבחינה: שעתיים וחצי (150 דקות).  
מותר להשתמש בדף הנוסחאות המצורף. אין להשתמש בכל חומר עזר אחר (גם לא במחשבון).  
יש לענות על 5 מתוך 6 השאלות. כל השאלות שוות-משקל.  
נא להסביר ולנמק בבירור את הפתרון, ולכלול במחברת את כל החישובים הנחוצים.

*מהצחה!*

1. מלוח משובץ בגודל  $7 \times 7$  מסירים את המשבצת האמצעית.  
(א) הוכח שהמשבצות הנותרות ניתנות לכיסוי על ידי אבני דומינו, כאשר כל אבן מכסה שתי משבצות סמוכות.  
(ב) מסירים מהלוח עוד שתי משבצות, נוסף למשבצת האמצעית. הסבר בדיוק מתי ניתן לכסות את המשבצות הנותרות על ידי אבני דומינו. נמק היטב את תשובתך.

2. מצא את מספר הפתרונות של המשוואה  
 $x_1 + \dots + x_{10} = 200$   
כאשר  $x_i \geq i$  שלם  $(1 \leq i \leq 10)$ .

3. הוכח כי  $\binom{3n}{n} = \left(\frac{27}{4}\right)^n \cdot O(n^{-1/2})$ .

4. מהו מספר הדרכים לחשב את המכפלה  $x_1 \cdot \dots \cdot x_{100}$  בלי להשתמש בחוק הקיבוץ (אסוציאטיביות), אלא רק בסדרת הכפלות של שני גורמים כל פעם?

5. יהי  $\frac{10x-3}{(1-2x)(1-3x)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  טור חזקות פורמלי. הוכח:  $a_n > 0$  עבור  $n$  גדול מספיק.

6. בכמה מספרים עשרוניים בעלי  $n$  ספרות בדיוק, שאף אחת מהן איננה 0, סכום הספרות הוא  $n+20$ ?