

מבוא לקומבינטוריקה (89254) \ פרופ' רון עדין בחינת סיום (מועד א')

משך הבחינה: שעתיים וחצי (150 דקות).
מותר להשתמש בדף הנוסחאות המצורף. אין להשתמש בכל חומר עזר אחר (גם לא במחשבון).
יש לענות על 5 מתוך 6 השאלות. כל השאלות שוות-משקל.
נא להסביר ולנמק בבירור את הפתרון, ולכלול במחברת את כל החישובים הנחוצים.

מהצחה!

1. יהיו: p מספר ראשוני, $0 \leq b \leq a$ מספרים שלמים המוצגים לפי בסיס p ע"י
 $a = a_0 + a_1 p + \dots + a_t p^t$, $b = b_0 + b_1 p + \dots + b_t p^t$
כאשר $0 \leq a_i \leq p-1$, $0 \leq b_i \leq p-1$ לכל i . הוכיחו:

$$\binom{a}{b} \equiv \prod_i \binom{a_i}{b_i} \pmod{p}$$

כאשר מגדירים $\binom{a_i}{b_i} := 0$ אם $0 \leq a_i < b_i$.

2. בכמה מספרים עשרוניים בני n ספרות מופיעות ספרות אי-זוגיות בלבד? בכמה מתוכם הספרות 1, 5, 9 מופיעות (כל אחת בנפרד) מספר זוגי של פעמים?

3.

(א) חשבו את מספר הילוכי השריג מהנקודה (0,5) לנקודה (20,50) שאינם נוגעים בישר $y = x$.

(ב) חשבו את מספר הילוכי השריג בין הנקודות הנ"ל הנוגעים בישר הנ"ל אך אינם עוברים אותו.

4. הוכיחו: בכל תת-קבוצה בגודל 30 של הקבוצה $\{1, \dots, 1000\}$ יש שני מספרים בעלי אותו סכום ספרות.

5. חשבו (נוסחה ללא Σ):

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} \binom{n}{k} \quad (n \geq 0)$$

6. מהו מספר הדרכים להטיל קוביה 70 פעם כך שסכום התוצאות יהיה 88?