

מבוא לקומבינטוריקה (89254) \ פרופ' רון עדין בחינת סיום (מועד ב')

משך הבחינה: שעתיים וחצי (150 דקות).
מותר להשתמש בדף הנוסחאות המצורף. אין להשתמש בכל חומר עזר אחר (גם לא במחשבון).
יש לענות על 5 מתוך 6 השאלות. כל השאלות שוות-משקל.
נא להסביר ולנמק בבירור את הפתרון, ולכלול במחברת את כל החישובים הנחוצים.

מהצחה!

1. הוכיחו: טור חזקות פורמלי $a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ הוא הפיך (לגבי כפל) אם ורק אם $a_0 \neq 0$.

2. מטילים קוביה n פעמים.
(א) מה ההסתברות שהתוצאות 1, 2 תתקבלנה (כל אחת לחוד) מספר זוגי של פעמים, ואילו התוצאות 3, 4 תתקבלנה (כל אחת לחוד) מספר אי-זוגי של פעמים? אין הגבלה על מספר ההופעות של 5, 6.
(ב) מה ההסתברות שהתוצאות 1, 2 תתקבלנה (יחד) מספר זוגי של פעמים, ואילו התוצאות 3, 4 תתקבלנה (יחד) מספר אי-זוגי של פעמים? אין הגבלה על מספר ההופעות של 5, 6.

3. הוכיחו: מספר הדרכים לחלק מצולע משוכלל בעל $n+2$ צלעות למשולשים ע"י העברת $n-1$ אלכסונים לא נחתכים שווה למספר העצים הבינריים המלאים בעלי n קדקודים פנימיים. (בעץ בינרי מלא, לכל קדקוד פנימי יש בדיוק שני בנים, ימני ושמאלי; כל קדקוד לא פנימי הוא עלה.)

4. (א) מצאו את ספרת היחידות בהצגה העשרונית של המקדם הבינומי $\binom{111}{33}$.

(ב) באיזו חזקה של 3 מתחלק $\binom{111}{33}$?

5. (א) הוכיחו: תת-קבוצה בגודל 36 של הקבוצה $\{1, \dots, 70\}$ בהכרח מכילה מספר וכפולה שלו.

(ב) מצאו תת-קבוצה בגודל 35 של הקבוצה $\{1, \dots, 70\}$ שאינה מכילה מספר וכפולה שלו.

6. מצאו את מספר הפתרונות של המשוואה $x_1 + \dots + x_{10} = 1000$ כאשר $50 \leq x_i \leq 250$ שלם לכל $1 \leq i \leq 10$.