

מבוא לקומבינטוריקה (89254) \ פרופ' רון עדין בחינת סיום (מועד ג')

משך הבחינה: שעתיים וחצי (150 דקות).
 מותר להשתמש בדף הנוסחאות המצורף. אין להשתמש בכל חומר עזר אחר (גם לא במחשבון).
 יש לענות על 5 מתוך 6 השאלות. כל השאלות שוות-משקל.
 נא להסביר ולנמק בבירור את הפתרון, ולכלול במחברת את כל החישובים הנחוצים.

מהצחה!

1. (א) הוכיחו: אם n, m מספרים טבעיים אז לכל סדרה באורך $mn+1$ של מספרים ממשיים שונים יש: אן תת-סדרה מונוטונית עולה באורך $m+1$, אן תת-סדרה מונוטונית יורדת באורך $n+1$ (או שתיהן).
 (ב) לכל n, m כנ"ל תנו דוגמה של סדרה באורך mn שאין לה תת-סדרות כנ"ל.

2. מצאו את מספר הסדרות $(a_1, \dots, a_{300}) \in \{1, -1\}^{300}$ שסכומן $a_1 + \dots + a_{300} = 100$ כך שכל סכום חלקי $a_1 + \dots + a_k > 0$ ($1 \leq k \leq 299$).

3. הוכיחו:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n} \quad (n \geq 0)$$

4. כמה מספרים בני 100 ספרות לכל היותר, הכתובים בבסיס 7, הם בעלי סכום ספרות 25?

5. מצאו את מקדם x^{70} בטור החזקות הפורמלי $\frac{1+2x+3x^2+4x^3+\dots}{1-x+x^2-x^3+\dots}$

6. הוכיחו: אם n הוא חזקה (שלמה חיובית) של 2 אז המקדם הבינומי $\binom{n}{k}$ הוא זוגי לכל $0 < k < n$.