

מבוא לקומבינטוריקה (89254) \ פרופ' רון עדין בחינת סיום (מועד א')

משך הבחינה: שעתיים וחצי (150 דקות).
מותר להשתמש בדף הנוסחאות המצורף. אין להשתמש בכל חומר עזר אחר (גם לא במחשבון).
יש לענות על 5 מתוך 6 השאלות. כל השאלות שוות-משקל.
נא להסביר ולנמק בבירור את הפתרון, ולכלול במחברת את כל החישובים הנחוצים.

מהצחה!

1. הוכיחו: בכל סדרה של 700 מספרים שלמים יש תת-סדרה רצופה (לא ריקה) שסכום איבריה מתחלק ב-700.

2. יהיו $a \geq b \geq 0$ מספרים שלמים. הוכיחו: מספר הילוכי השריג $(a, b) \rightarrow (0, 0)$ הנמצאים ממש מתחת לישר $y = x + 1$ הוא $\frac{a-b+1}{a+1} \binom{a+b}{a}$.

3. מצאו נוסחה מפורשת עבור הסכום

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \binom{n}{12} + \dots$$

4. מסירים משבצת אחת מלוח משובץ בגודל 5×7 . באילו תנאים אפשר לכסות את הלוח הנותר ע"י אבני דומינו? הוכיחו את טענתכם.

5. בכמה דרכים ניתן לצבוע ב- c צבעים את הצלעות והאלכסונים של מחומש משוכלל, אם צביעות המתקבלות זו מזו ע"י סיבוב או שיקוף של המחומש נחשבות זהות? אין הכרח להשתמש בכל הצבעים.

6. בכמה מספרים עשרוניים בעלי n ספרות לכל היותר מופיעות הספרות 3, 2, 1 ביחד מספר זוגי של פעמים, הספרות 6, 5, 4 מופיעות ביחד מספר אי-זוגי של פעמים, והספרות 0, 9, 8, 7 מופיעות ללא הגבלה? דוגמא למספר כזה, עבור $n = 10$, היא $39414522 = 0039414522$. בדקו את תשובתכם עבור $n = 1, 2$.