מבוא לקומבינטוריקה (89554) \ פרופ' רון עדין
תשובות לשאלות בחינות תשס"ה (מועדים א', ב')

מועד א'

1. אם 70 הסכומים החלקיים $s_k = \sum_{i=1}^{k} x_i$ $(1 \le k \le 70)$ שונים זה מזה (מודולו 70), אז אחד מהם מתחלק ב- 70. אם לא – אז יש שני סכומים חלקיים שווים: $s_k = s_l$ $(k < l)$, והסכום החלקי $s_l - s_k = \sum_{i=k+1}^{l} x_i$ מתחלק ב- 70.

2. $\binom{59}{10}$

3. <u>דרך א':</u> גוזרים פעם ועוד פעם (לפי x) את $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$ ומציבים $x=1$.
<u>דרך ב':</u> משתמשים בזהויות

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1} \qquad (1 \le k \le n)$$

$$k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2} \qquad (2 \le k \le n)$$

4. $\frac{1}{7}\binom{14}{6}$

5. $a_n = 5^n + (-2)^n - 1$

6. פונקציה יוצרת מעריכית:

$$a(x) = \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \cdot e^x \cdot (e^x - 1) = \tfrac{1}{2}(e^{3x} - e^{2x} + e^x - 1)$$

ולכן

$$a_0 = 0, \qquad a_n = \tfrac{1}{2}(3^n - 2^n + 1) \quad (n \ge 1)$$

מועד ב'

1. המסרק של גומורי (או דרך אחרת ליצור מסילה סגורה מכל משבצות הלוח).

2. $\binom{110}{10}$

3. נוסחה היוריסטית מקורבת:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{4k} \sim \frac{1}{4}\cdot 2^n$$

נוסחה מדויקת:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{4k} = \frac{1}{4}\sum_{t=0}^{3}(1+i^t)^n = \frac{1}{4}[2^n+(1+i)^n+0^n+(1-i)^n] = \frac{1}{4}\left(2^n+2^{n/2}\cdot 2\cos\frac{n\pi}{4}\right)$$

4. מספר הילוכי השריג $(0,0)\to(2,5)$ שהשטח מתחתם הוא 3 : 2 .
זהו גם מקדם q^3 בפולינום

$$\begin{bmatrix}7\\2\end{bmatrix}_q = \frac{[7]_q!}{[2]_q![5]_q!} = \frac{[7]_q[6]_q}{[2]_q[1]_q} = \frac{(1-q^7)(1-q^6)}{(1-q^2)(1-q^1)} = (1+q+q^2+q^3+\ldots+q^6)(1+q^2+q^4)$$

5. ע"י חיפוש שורשים רציונליים לפולינום האופייני מקבלים:

$$\alpha^3-6\alpha^2+11\alpha-6=(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)$$

ולכן

$$a_n = 3^n-2^n+1 \qquad (n\ge 0)$$

6. פונקציה יוצרת רגילה:

$$\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{x}{1-x}\cdot(1+x+x^2+x^3) = \frac{x(1-x^4)}{(1-x^2)(1-x)^2} = \frac{x(1+x^2)}{(1-x)^2} = x(1+x^2)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

ומקדם x^n בה:

$$a_n = n+(n-2) = 2n-2 \quad (n\ge 2)$$

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1$$