

מבוא לקומבינטוריקה (89554) \ פרופ' רון עדין בחינת סיום (מועד ב')

משך הבחינה: שעתיים וחצי (150 דקות).
 מותר להשתמש בדף הנוסחאות המצורף. אין להשתמש בכל חומר עזר אחר (גם לא במחשבון).
 יש לענות על 5 מתוך 6 השאלות. כל השאלות שוות-משקל.
 נא להסביר ולנמק בבירור את הפתרון, ולכלול במחברת את כל החישובים הנחוצים.

בהצלחה!

1. הוכיחו: אם מסירים מלוח שחמט שתי משבצות כלשהן בעלות צבעים שונים – תמיד ניתן לכסות את כל הלוח הנוותר ע"י אבני דומינו (כל אבן דומינו מכסה שתי משבצות סמוכות, אופקית או אנכית).
2. מהו מספר הסדרות (a_1, \dots, a_{10}) של מספרים שלמים המקיימים $100 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{10} \leq 200$?
3. מהו מספר הסדרות הבינריות באורך n שמספר האפסים בהן מתחלק ב-4 ? תן נוסחה היוריסטית מקורבת וגם נוסחה מדויקת.

4. מצאו (בכל דרך שתמצאו) את מקדם q^3 בפולינום (מקדם q -בינומי) $\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}_q$.

5. פתרו את נוסחת החזרה

$$a_n - 6a_{n-1} + 11a_{n-2} - 6a_{n-3} = 0 \quad (n \geq 3)$$

עם תנאי ההתחלה

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 2, \quad a_2 = 6$$

6. ברצוננו להרכיב סל פירות המכיל אפרסקים, תפוחים ושזיפים. בכמה דרכים ניתן לבחור (בל"ל לסדר בסל) n פירות, בהרכב: אפרסקים במספר זוגי, תפוח אחד לפחות, ושלושה שזיפים לכל היותר?